11. Argumentação e Demonstração no Contexto da Formação Inicial de Professores[1]

Domingos Fernandes
Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Lisboa
dfernandes@fpce.ul.pt

Lina Fonseca
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
linamaria@vizzavi.pt

Introdução

A investigação em contextos de formação inicial tem sugerido que os futuros professores de Matemática têm dificuldade em organizar o seu ensino com base na resolução de problemas ou de situações problemáticas (Borralho, 1997; Fernandes, 1997; Fonseca, 1995; Vale, 1993; Lester, 1997). Vários factos parecem estar relacionados com esta realidade. Por um lado, os seus conhecimentos de Matemática, de Didáctica da Matemática, de Pedagogia e de Educação em geral parecem estar quase sempre organizados de forma pouco flexível, pouco contextualizada e pouco integrada. Por outro lado, como tem sido abundantemente referido na literatura, as concepções destes jovens, futuros professores, parecem condicionar de forma relevante a organização e desenvolvimento das suas práticas (*e.g.* Carrillo & Contreras, 2000; Chapman, 2000; Cooney, 1994; Fernandes, 1997; Hiebert & Carpenter, 1992; Kloosterman & Mau, 1997; Thompson, 1985; Villani, 1998). Ou seja, como se refere em Fernandes (1997), as dificuldades destes jovens professores parecem poder explicar-se por anos sucessivos de

> "experiências formativas em que raramente se valorizaram a identificação de regularidades, a formulação e a verificação de conjecturas, o

---

[1] Trata-se ainda de uma investigação preliminar, exploratória, de uma outra que se encontra em fase de conclusão. Por isso mesmo, neste artigo, dão-se apenas os principais contornos do que nos pareceu poder ser mais relevante. Artigos subsequentes abordarão esta temática com mais profundidade.

> estabelecimento de generalizações, a análise de fenómenos da vida real através de "ferramentas" matemáticas ou estratégias coerentes de avaliação formativa" (p. xviii).

A formação inicial pode e deve ser uma oportunidade de reflexão, de aprendizagem e de crescimento pessoal e profissional dos futuros professores que, através do desenvolvimento dos seus conhecimentos e da reconstrução das suas concepções, poderão tornar-se mais aptos para responder às actuais exigências curriculares. Assim, a adopção de estratégias que promovam a mudança continua a ser um desafio para a formação de professores (Kloosterman & Mau, 1997). Tal como observa Biehler (1994), a formação deve desenvolver conhecimentos e competências práticas dos professores. Nestas condições, a formação inicial deve contribuir para responder a recomendações constantes em documentos curriculares nacionais e internacionais, nomeadamente no que se refere ao desenvolvimento de capacidades de argumentação e de demonstração. Na verdade, tais documentos referem explicitamente que todos os alunos devem desenvolver a capacidade de argumentação (Ministério da Educação - ME, 2001; National Council of Teachers of Mathematics - NCTM, 2000). Ou seja, *todos* os alunos devem ter oportunidades para se envolverem na exploração de situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica, argumentar e comunicar oralmente ou por escrito as suas conclusões, em qualquer tema da matemática (ME, 2001).

A formação inicial deve assim constituir uma oportunidade para que os futuros professores reconstruam as suas concepções e conhecimentos através da utilização sistemática da resolução de problemas (Carrillo & Contreras, 2000).

Argumentar e Demonstrar

Segundo alguns autores (*e.g.* Balacheff, 1991; Duval, 1992-1993), com a argumentação não se pretende demonstrar a verdade de uma afirmação, nem mostrar a validade lógica de um raciocínio, mas obter a concordância de outrém para a validade de uma dada afirmação. O objectivo da argumentação seria o de obter a concordância do interlocutor, convencer, enquanto que o da demonstração seria o de garantir a verdade. No entanto, nem sempre os argumentos que convencem são válidos (*e.g.* Balacheff, 1991; Dreyfus, 1999; Duval, 1992-1993; Mogetta, 2000; Segal, 2000).

Na argumentação quaisquer meios, em princípio, são lícitos, enquanto que na demonstração são utilizados conhecimentos e procedimentos reconhecidos como válidos e aceites sem reservas pela comunidade científica. Como resultado da argumentação, as soluções dos problemas não têm carácter definitivo, enquanto que as demonstrações, se não ocorrer alteração do contexto, deverão ser sempre válidas (Balacheff, 1991). Uma argumentação pode ser apresentada para um determinado caso particular o que não significa que possa aplicar-se a todos os casos, mesmo que no mesmo contexto; pode ser apresentada com base em alguns exemplos; pode contemplar apenas alguns aspectos do problema.

Drouhard, Sackur, Maurel, Paquelier & Assude (1999) referem que, numa discussão matemática, os envolvidos "experimentam" as contradições. Não significa estar envolvido nalgum tipo de debate contraditório, mas é sentir que outros podem ter a certeza de ideias opostas às nossas e que não podem ser convencidos por argumentos de autoridade. O facto de surgirem contradições contribui para que, em matemática, os argumentos sejam particularmente fortes; por isso se diz que os argumentos devem *resistir* (Drouhard *et al.*, 1999). Entende-se que esta resistência vai sendo reforçada quando os argumentos ultrapassam sucessivas "*provas de esforço*".

O raciocínio utilizado para construir conjecturas plausíveis é o *raciocínio argumentativo,* enquanto que para as validar é utilizado o *raciocínio dedutivo*, organizado uniformemente com base em regras tais como o *modus ponens* ou o *modus tolens* (Duval, 1991; 1992-93). Para formular uma conjectura basta, por vezes, observar alguns casos particulares e notar uma característica que se mantém invariante, baseando-se os argumentos nesses casos particulares. Para a demonstrar há maior exigência e especificidade, devendo os argumentos a utilizar ser gerais e resistentes. A argumentação está para a conjectura, assim como a demonstração está para o teorema (Balacheff, 1999).

A demonstração parece ser mais exigente e mais específica do que a argumentação. Para que os argumentos apresentados em defesa das afirmações matemáticas possam constituir demonstração[2] devem ser *convincentes*, *gerais, rigorosos*, *completos* e *resistentes*.

---

[2] Referimo-nos à demonstração não formal, mas que pode ser aceite pela comunidade de matemáticos, tal como defende Schoenfeld (1988), com o exemplo da demonstração de que os ângulos adjacentes à base de um triângulo isósceles são congruentes. "Considere um triângulo [ABC] que é isósceles de base [BC]. Traçar a mediana [AD]. Os lados [AB] e [AC] são congruentes, [AD] é comum, [BD] e [DC] são congruentes (D é ponto médio de [BC]). Assim, os triângulos [ABD] e [ACD] são congruentes. Então os ângulos ABD e ACD são congruentes".

O convencimento pode ser interpretado a vários níveis. Segundo Mason, Burton & Stacey (1985) podemos convencer-nos a nós próprios, convencer um amigo e convencer um inimigo. Facilmente nos convencemos de que uma afirmação é verdadeira, bastando talvez alguns casos particulares, e de que os nossos raciocínios estão correctos, mesmo que sejam frágeis, incompletos e particulares. Daí a necessidade de desenvolver um "inimigo interno" que questione as nossas opções e os nossos argumentos.

O rigor dos argumentos deve estar sempre presente no raciocínio dos alunos, sem que tal se relacione necessariamente com formalismo. Por exemplo, um aluno da Educação Básica apresenta um raciocínio rigoroso quando, relativamente à soma de dois números ímpares, afirma que as unidades "sobrantes" em cada número formam um novo par, quando cada um dos números é agrupado em pares, sendo, por isso, a soma também um número par. Na sua essência não difere do que, vulgarmente, se faz em matemática, utilizando linguagem algébrica: $(2a+1)+(2b+1) = 2a+2b+2$. A diferença reside, apenas, na ferramenta utilizada. Os argumentos devem ser completos, de modo que a cadeia de raciocínios construída não contenha falhas, mesmo que referidos a casos particulares. Em matemática muitas afirmações referem-se, por exemplo, à totalidade dos elementos de um conjunto infinito. Os argumentos a apresentar para as justificar devem ser gerais, não bastando a exibição de casos particulares, e não se aceitando que ocorra alguma falha. Este aspecto mostra a exigência da matemática comparativamente às ciências experimentais, em que a presença de um contra-exemplo não invalida a afirmação em análise. Os argumentos devem ainda resistir a sucessivas "provas de esforço", provas de contra-argumentação. Quando tal não acontecer devem ser reavaliados, reformulados ou abandonados, por forma a resistirem. Pode acontecer que argumentos incorrectos "passem" por provas de contra-argumentação sem que as suas fragilidades sejam detectadas. A este propósito, Dreyfus (1999), refere que, por vezes, alguns argumentos inadequados podem convencer, por algum tempo, alguns especialistas.

Muitos investigadores (*e.g.* Davis, 1998; Davis & Hersh, 1998; Ernest, 1991; Franco de Oliveira, 1995; Greenberg, 1993; O´Daffer & Thornquist, 1993; Schoenfeld, 1988; Tymoczko, 1998) relacionam demonstração, no seio da teoria matemática, com uma sequência finita de afirmações interligadas por raciocínios lógicos válidos que, partindo das hipóteses, termina na proposição que se pretende demonstrar, construindo assim um argumento válido de que a proposição é verdadeira. Não há nenhum método infalível para inventar/descobrir demonstrações, visto não se tratar de um problema rotineiro (*e.g.* Davis & Hersh, 1995; Greenberg, 1993; Retzer, 1996; Schoenfeld, 1988; Villani, 1998). A experiência desenvolve competências que contribuem para encontrar "soluções adequadas".

Os professores podem ter um papel relevante na selecção de tarefas que melhorem as competências dos alunos no domínio da demonstração (Chazan, 1990; Knuth, 2000). Porém, a sua formação parece continuar a não corresponder às actuais exigências curriculares (*e.g.* Goetting, 1995; Harel & Sowder, 1998; Jones, 1997; Martin & Harel, 1989; Simom & Blume, 1996).

O Problema da Investigação

Como referem as *Normas* Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1991), para que os professores mudem o modo como ensinam é necessário que desenvolvam sólidos conhecimentos de matemática e que os saibam relacionar com a chamada matemática escolar.

Talvez por isso mesmo, o NCTM (2000) sublinha a importância da criação de ambientes de formação em que *todos* os alunos são encorajados a apresentar o seu pensamento, onde *todos* contribuem para avaliar as ideias apresentadas, onde sintam a necessidade de demonstrar como parte integrante do processo científico, ao lado da formulação de conjecturas, da sua validação, da procura de contra-exemplos e não apenas como uma necessidade formal exigida pelo professor. Ambientes ricos em questões do tipo "Como?" e "Porquê?" ajudarão os alunos a formular mais questões e a aceitar menos passivamente as informações apenas decorrentes de autoridade, contribuindo para desenvolver o seu raciocínio matemático.

Tendo por base o exposto, investigou-se de que modo(s) um ambiente de formação em que se valorizam a resolução de problemas, a experimentação, a comunicação, a formulação, avaliação e justificação de conjecturas, a partilha de opiniões e o trabalho em grupo se relaciona com o desenvolvimento de competências no domínio da argumentação/demonstração manifestadas por futuros professores de matemática do 1º e 2º ciclos da educação básica.

Metodologia e Procedimentos

A investigação decorreu numa Escola Superior de Educação, numa turma com 26 alunos, futuros professores da educação básica (1º e 2º ciclos) e no contexto de duas disciplinas da chamada formação específica – Geometria, do 2º ano e Transformações Geométricas, do 4º ano. Pode dizer-se que a investigação teve características longitudinais, uma vez que os participantes foram "acompanhados" ao longo de um período de cerca de três anos em que se recolheram, analisaram e interpretaram dados considerados relevantes para responder ao respectivo problema.

As "experiências formativas" dos participantes, enquanto alunos do ensino não superior, correspondiam, no geral, ao modelo dominante. Ou seja, todos referiram que o seu papel na aprendizagem tinha sido essencialmente passivo, tendo-se limitado, na maioria dos casos, a treinar exercícios de natureza quase sempre rotineira. Tipicamente os seus professores faziam uma exposição mais ou menos longa da "matéria", a que se seguia uma sessão de exercícios, normalmente transcritos e corrigidos no quadro. Já como alunos do ensino superior e no âmbito de um módulo integrado numa disciplina de Didáctica da Matemática, todos os participantes tinham tido alguma experiência na resolução de problemas não rotineiros e tinham desenvolvido competências básicas nesta área com base no modelo prescritivo de George Pólya.

O estudo ocorreu essencialmente no contexto "natural" das aulas das disciplinas acima referidas e centrou-se na descrição, análise e interpretação de dados obtidos a partir do trabalho escrito que os participantes desenvolveram na resolução de um conjunto de problemas, de observações, de entrevistas mais ou menos formais, de questionários e de um conjunto de múltiplas notas, mais ou menos reflexivas, que se produziram em diversos contextos e momentos da investigação.

Na disciplina de Geometria e para a resolução de tarefas explicitamente propostas para o efeito (Fonseca, 2002), utilizou-se uma aplicação de geometria dinâmica, o *Geometer's Sketchpad* (GSP; Jackiw, 1995). As tarefas envolviam a experimentação, a formulação e avaliação de conjecturas e a respectiva demonstração.

Em ambas as disciplinas o ambiente de formação favorecia a formulação, avaliação e demonstração de conjecturas por parte dos alunos, a construção autónoma de conhecimento e a utilização sistemática de procedimentos que pudessem contribuir para que os alunos se convencessem, convencessem os colegas e o professor acerca da correcção dos seus raciocínios, argumentos e demonstrações.

De forma regular e sistemática foram utilizadas questões tais como: "Porquê?", "Como sabe que é sempre assim?", "O que há de semelhante nessas situações?", "Como explica isso?" ou "Porque é que isso aconteceu?". Criou-se um clima de tolerância, de compreensão e de aceitação perante quaisquer dúvidas, incertezas ou mesmo raciocínios erróneos. Fomentou-se sempre a necessidade de persistir para despistar dúvidas e incertezas ou para corrigir os erros.

A selecção das tarefas teve em conta o facto de terem que ser problemas que motivassem e desafiassem os alunos participantes. Ou seja, nem a sua resolução podia ser propriamente imediata nem o seu grau de dificuldade podia impedir que a maioria dos alunos fosse capaz de as resolver através de uma variedade de processos de resolução. Naturalmente, a resolução das tarefas propostas exigiam conhecimentos de natureza diversa, nomeadamente conhecimentos de conteúdo matemático, competências para integrar e analisar conhecimentos de diferentes disciplinas da matemática e para abordar um problema de várias maneiras.

Pode dizer-se com segurança que, para a grande maioria dos participantes, as tarefas propostas constituíram problemas com as características acima enunciadas.

A resolução das tarefas processou-se tanto individualmente como em grupo.

Nas três secções que se seguem descrevem-se e discutem-se as resoluções de duas tarefas por parte dos alunos nas aulas da disciplina de Transformações Geométricas.

Resolução da Tarefa *Composição de Reflexões de Eixos Concorrentes*

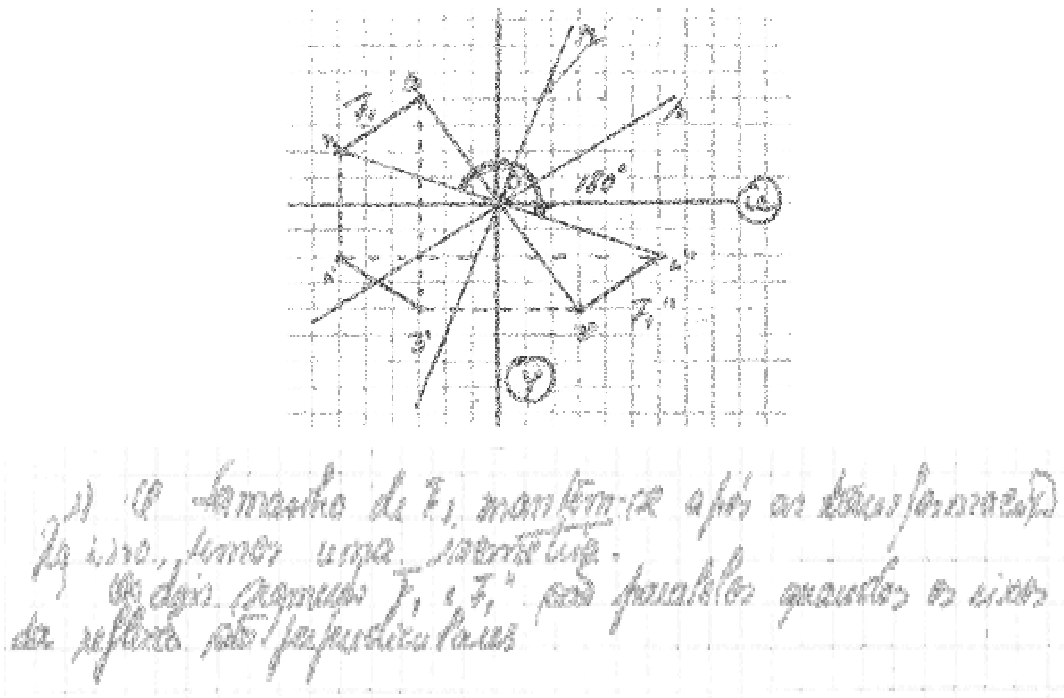
A. *Considere duas rectas x e y concorrentes. Considere uma Figura 1 – F1 – e construa o seu transformado pela composição de reflexões o* $R_y o R_x$

1) *Observe e compare F1 e o seu transformado. O que conclui sobre a posição de F1 e do seu transformado por* $R_y o R_x$*?*
2) *Compare com as conclusões dos seus colegas.*
3) *Será possível obter o* _mesmo_ *transformado de F1 apenas por uma única transformação? Caracterize qual.*

B. *Repita o procedimento anterior considerando agora* $R_x o R_y$.

C. *Compare os resultados obtidos em A. com os obtidos em B. Apresente uma conclusão geral.*

Os alunos leram a tarefa, pareceram ter compreendido a questão, identificaram os dados e a condição inicial. Tinham de obter a composta de duas reflexões em que os eixos eram rectas concorrentes. Nesta tarefa nenhum aluno usou o GSP, tendo todos feito, ou pelo menos iniciado, o esboço em papel e lápis. Alguns alunos manifestaram dificuldades na concretização do esboço. Discutiram inicialmente a posição dos eixos tendo a análise do trabalho escrito revelado que três alunos começaram por considerá-los perpendiculares. Como se mostra na figura seguinte, um aluno concluiu sobre a composta das reflexões estar na presença de uma meia volta, assinalando no esboço o ângulo de 180°.



Questionados por outros colegas sobre o facto dos eixos serem sempre perpendiculares e conscientes de que assim não era, estes alunos, excepto um, acabaram por fazer um esboço mais geral, considerando os eixos concorrentes, mas não perpendiculares. Nesta situação já não era tão fácil identificar uma única transformação que fosse equivalente à composta.

Depois do esboço realizado compararam as posições da figura original (F_1) e do transformado (F_1''). A grande maioria dos esboços realizados permitiu constatar que original e transformado não eram sempre paralelos. Este aspecto dos esboços permitiu que, quase todos os alunos, concluíssem que a composição de transformações não podia assim ser substituída por uma translação.

Estavam implícitas três conjecturas para avaliar: como se tratava de uma isometria a transformação procurada podia ser translação ou rotação ou reflexão. Com base na constatação realizada, restava decidir entre reflexão ou rotação.

Não foi fácil a opção. Os alunos tiveram dificuldade em conjecturar sobre a "única" transformação que podia substituir a composição de reflexões de eixos concorrentes.

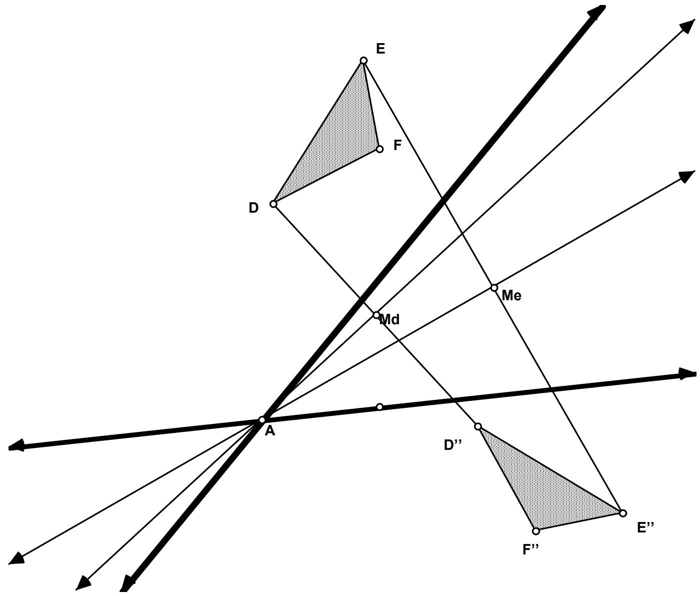
Para ser reflexão onde procurar o eixo? Gerou-se discussão e, com recurso à definição de reflexão, mas muito lentamente, alguns alunos foram dizendo que tinham de usar a mediatriz do segmento de recta que une original e transformado. "*Temos de traçar a mediatriz de [AA'']. É o eixo*". Começaram a traçar a mediatriz de [AA'']. Afinal parecia poder tratar-se de uma reflexão. Alguns alunos pareciam dar-se por satisfeitos com o "eixo" encontrado. Após algum tempo um aluno disse "*Mas eu sei que dá uma rotação, li num dos livros [da bibliografia] mas não percebo porque é que não pode ser uma reflexão*". Depois desta intervenção, os colegas procuravam razões para não se escolher uma reflexão, apesar de alguns já terem encontrado até o "eixo". A busca estava a ser difícil, principalmente para os alunos que já tinham o "eixo", a mediatriz de [AA'']. Para ajudar a sair do impasse, formularam-se algumas questões orientadoras.

Quais os pontos que foram transformados na composição das reflexões?

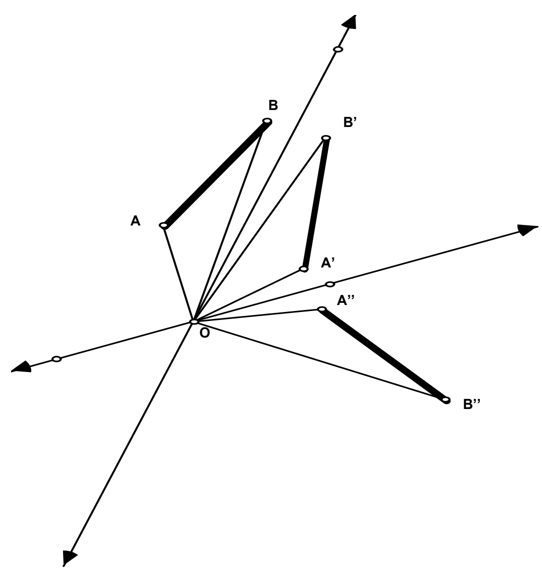
Qual a relação entre o eixo a encontrar e [AA'']?

Qual a relação entre o eixo a encontrar e [BB'']?

Estas questões parecem ter ajudado alguns alunos a reflectir sobre a definição de reflexão e a construir a mediatriz de [BB'']. Esperava-se que com isso pudessem chegar a alguma conclusão. Como de facto veio a acontecer. Constataram que o "eixo" a existir teria de ser único, isto é, mediatriz de todos os segmentos de recta definidos por um ponto e pelo seu correspondente transformado. Ora nos esquemas que tinham construído isso não acontecia. As mediatrizes de [AA''] e de [BB''] eram distintas. Eram rectas concorrentes que concorriam também com os eixos x e y iniciais, no mesmo ponto. Portanto, não podia tratar-se de reflexão. A figura seguinte ilustra os esboços efectuados pelos alunos.



Então, por exclusão de casos, a transformação "única" só podia ser a rotação. "Agora já percebi porque não é reflexão" referiu o aluno que havia formulado a questão. Chegou-se à rotação por eliminação das outras possibilidades. Era agora necessário encontrar o centro, garantir que se estava perante uma única rotação e concluir sobre a amplitude. Os alunos recordaram que o centro da rotação é um ponto fixo, igualmente distanciado de um ponto e do seu transformado, localizando-se, portanto, sobre a mediatriz do segmento de recta que estes pontos definem. Ora as mediatrizes traçadas intersectavam os eixos iniciais no seu ponto de intersecção, para além deste ser um ponto fixo na composição das reflexões. O ponto de intersecção dos eixos é o centro da rotação. A análise do trabalho escrito revelou que nem todos os alunos justificaram a sua opção.



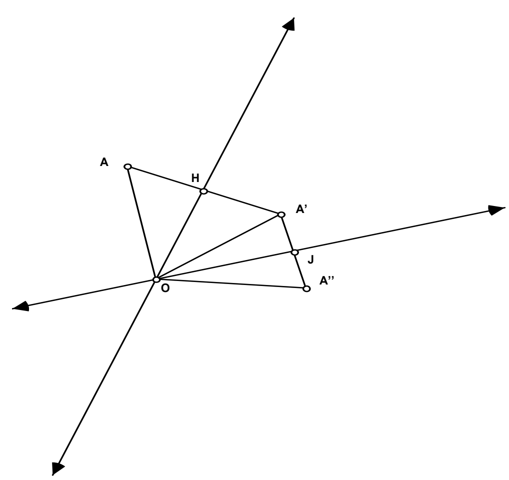
Conhecido o centro da rotação, alguns alunos quiseram certificar-se de que os ângulos AOA'' e BOB'', representados na figura anterior, eram congruentes, para *"ver se eles rodaram o mesmo"*.

Justificaram que os triângulos [AOB] e [A''OB''] eram congruentes.

Como AÔA'' = AÔB+BÔA'' e BÔB'' = BÔA''+A''ÔB'' e como os ângulos AOB e A''OB'' são congruentes, conclui-se que AÔA'' = BÔB''.

Apenas dois alunos concluíram as justificações. As dificuldades dos restantes parecem ter-se devido ao esquema construído, devido à sobreposição de vários elementos que o constituíam.

Faltava saber a amplitude da rotação. Alguns alunos referiram que "*Falta saber qual o ângulo de rotação, que está relacionado com o ângulo [formado pelos] dos eixos*". *Como* se relacionava era necessário descobrir. Cinco alunos abordaram a questão, mas apenas dois concluíram sobre o modo de relacionar a amplitude da rotação com o ângulo formado pelos dois eixos de reflexão. Conseguiram "retirar" um "sub-esboço" do esboço global apresentado, como se ilustra na figura seguinte, e, com base nele, foram decompondo sucessivamente o ângulo formado pelo objecto, centro de rotação e imagem, recorrendo à imagem intermédia, e relacionando-o com o ângulo formado pelos eixos.



AÔA'' = AÔA' + A'ÔA''   = (AÔH+ HÔA')+ (A'ÔJ+JÔA'')

= 2 HÔA'+2 A'ÔJ = 2 (HÔA'+ A'ÔJ)

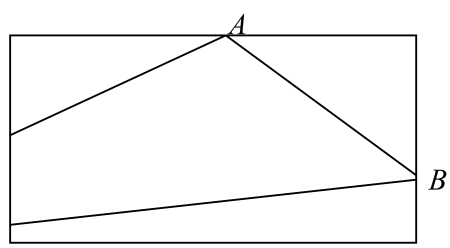
= 2 HÔJ

Foi notória a dificuldade que os alunos tiveram em identificar os ângulos congruentes no esboço realizado. Apesar da dificuldade, não encontraram uma estratégia – recorrer apenas a uma parte do esboço – que os ajudasse a resolver o problema. A visualização foi referida por dez alunos como uma das dificuldades sentidas na resolução desta e doutras tarefas.

Alguns alunos concluíram que "a composição de duas reflexões de eixos concorrentes é uma rotação de centro no ponto de intersecção dos eixos das reflexões e de amplitude dupla da amplitude do ângulo formado pelos eixos". Apesar da conclusão ser apresentada por vários alunos, nenhum deles justificou os quatro aspectos da questão: ser rotação, encontrar o centro, garantir que a rotação é única e descobrir a amplitude.

Resolução da Tarefa *Perímetro do Triângulo*

A figura representa a parte do triângulo [ABC] que foi possível desenhar numa folha de papel rectangular. Desconhece-se a localização do vértice C.



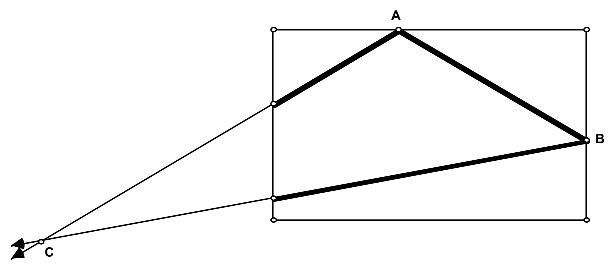
Determine o perímetro do triângulo [ABC], sem desenhar para fora do rectângulo que representa a folha de papel.

Explique como pensou.

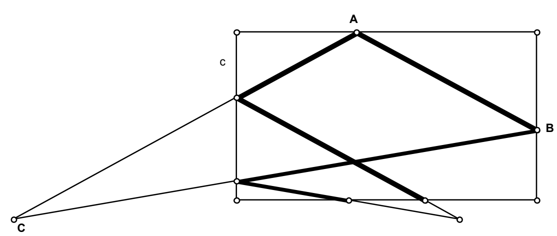
Vinte e quatro alunos estiveram envolvidos na resolução desta tarefa. Depois de terem lido o problema, estavam perplexos manifestando dúvidas quanto à possibilidade da sua resolução, dizendo que "é impossível" e não manifestando vontade de fazer tentativas.

"É impossível porquê?"

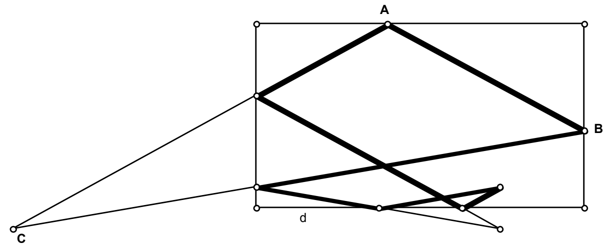
"Não temos triângulo como se pode calcular o perímetro?" Esta razão tinha alguma lógica. Para ultrapassar esta situação de impasse e levar os alunos, pelos menos, a tentar resolver o problema, decidi reduzi-lo a um problema mais simples: era permitido desenhar no exterior do rectângulo que representava a folha de papel, como passo intermédio. Depois desta alteração todos os alunos começaram por prolongar os lados do triângulo, de modo a obter o ponto C. De imediato, a grande maioria dos alunos da turma (75%) concluiu que era necessário "dobrar" o papel para colocar tudo o que estava no exterior do rectângulo, no seu interior. Concluíram que era necessário reflectir o triângulo que estava fora do hipotético papel. Os restantes optaram por outras isometrias: translação e meia volta. Tal como se ilustra na figura seguinte, alguns alunos decidiram-se pela medição imediata do perímetro depois de terem obtido o triângulo por prolongamento dos seus lados.



Para colocar dentro da folha de papel toda a parte do triângulo que estava no seu exterior, usaram reflexões reportando-se inicialmente a um eixo vertical, assinalado na figura seguinte por **c**, e obtiveram a imagem do triângulo "exterior" do rectângulo, como se sugere.



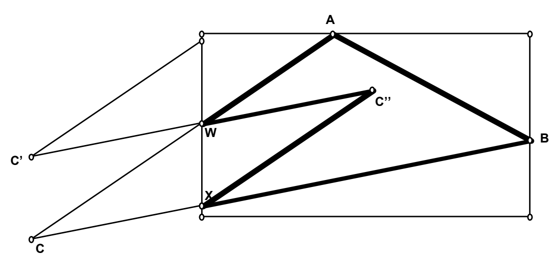
No entanto, como uma parte do "triângulo imagem" ainda surgia no exterior do rectângulo os alunos concluíram ser necessária uma nova reflexão. Assim, consideraram um eixo horizontal, representado por **d** na figura seguinte, e reflectiram a parte do triângulo que ficava no exterior do rectângulo segundo esse eixo. Como resultado, obtiveram todo o triângulo no interior da "folha de papel" conforme se pode ver na figura que se segue.



Agora bastava medir os segmentos para responder à questão, visto que, como justificaram, as transformações ocorridas foram provocadas por isometrias e, portanto, o perímetro do triângulo permanecia inalterado, tendo alguns alunos já conhecimento do seu valor.

Os restantes alunos (25 %) utilizaram, para "interiorizar" todo o triângulo, translações e meias voltas, depois de terem prolongado os lados do triângulo. Segundo este processo o triângulo "exterior" permanece sempre intacto. Talvez tenha sido esta a razão que levou os alunos a optar por este procedimento.

O vector director da translação inicial aplicada, foi o vector $\vec{XW}$. Tal como se ilustra na figura seguinte, devido à localização particular dos vértices do triângulo e à direcção dos lados, esta translação desloca o triângulo "exterior", mas mantém-no totalmente ligado ao rectângulo inicial. Seguidamente, os alunos aplicaram ao triângulo "deslocado" uma meia-volta de centro W, tendo obtido o triângulo [WXC´´]



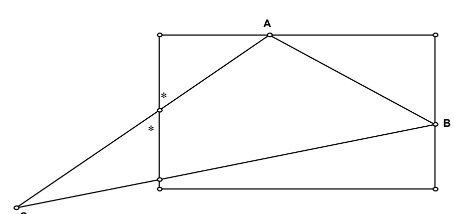
O perímetro do triângulo inicial pode obter-se, calculando o perímetro do polígono [WABXC''], visto que as transformações ocorridas são isometrias e, portanto, preservam as distâncias. Os alunos que usaram este procedimento não referiram por que motivo os triângulos "exterior" e "rodado" têm as mesmas dimensões, sendo, por isso, indiferentes para o cálculo do perímetro.

Com esta tarefa o que se pretendia, realmente, era encontrar um *modo* de obter o perímetro deste triângulo ou de outro qualquer nas mesmas condições. Um modo convincente, que pode até nem necessitar do desenho do triângulo, ou de um seu "correspondente perimétrico" e, menos ainda, necessitar de efectuar medições.

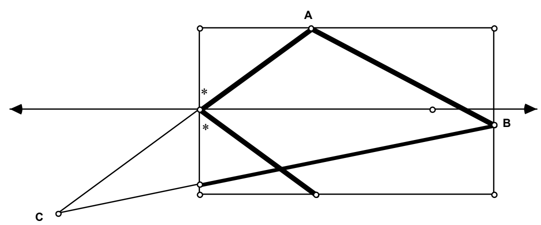
A análise do trabalho escrito mostrou que, após terem desenhado o triângulo [ABC], alguns alunos tiveram a preocupação de medir o comprimento dos segmentos de recta que formavam a sua fronteira. Seis alunos (25%) exibiram explicitamente o comprimento dos três lados do triângulo e do seu respectivo o perímetro. Este aspecto – saber a resposta – contribuiu para dar alguma garantia aos alunos de que o procedimento utilizado a seguir estava correcto. Os resultados coincidiam! Por vezes foi patente no trabalho que os alunos apresentaram que saber as definições e conhecer as propriedades não é suficiente. Necessitavam de "confirmar" com um exemplo, ou com medições, que as propriedades "funcionaram". Os restantes 18 alunos (75%) apresentaram um procedimento que permite calcular o perímetro deste triângulo ou de outro qualquer. Se efectuaram medições não as explicitaram no texto. A sua justificação baseou-se *apenas* em argumentos gerais.

Revisitando a Tarefa *do Perímetro do Triângulo*

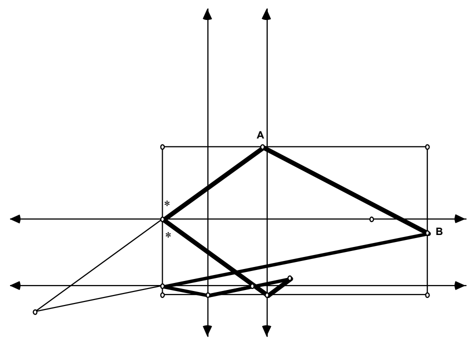
Passado algum tempo, esta tarefa foi de novo apresentada aos alunos para esclarecimento de dúvidas. Surgiram as questões habituais: "Como é que eu faço?", "O que é que eu uso?". Porém, a questão da impossibilidade já não se colocou. Alguns alunos começaram a desenhar com traço muito suave para fora do rectângulo, com o objectivo de, como disseram, estabelecer relações entre ângulos. Concluíram que os ângulos assinalados na figura que se segue eram congruentes por serem verticalmente opostos. O problema era o de obter os mesmos ângulos apenas "dentro" do rectângulo e perceber como podiam fazê-lo.



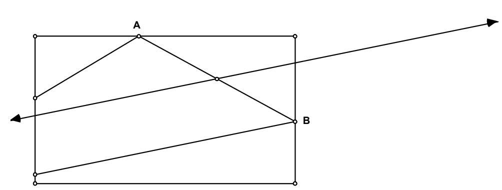
Pensaram, experimentaram, até que alguém se lembrou que, em vez de prolongar e depois reflectir sobre um eixo que contém o lado do rectângulo, podiam apenas reflectir a parte do segmento de recta [AC] contida na folha, segundo um eixo perpendicular ao lado da folha, como se sugere na figura seguinte



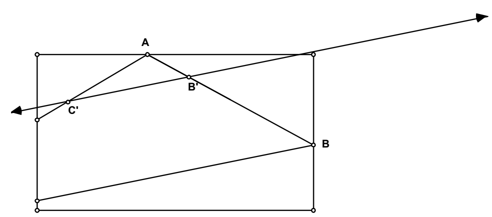
Os ângulos assinalados na figura anterior são congruentes pelo facto de serem imagem um do outro numa reflexão de eixo perpendicular ao bordo da folha de papel. Procedendo do mesmo modo para o segmento de recta [BC] e de novo reflectindo por eixos perpendiculares ao bordo consecutivo da folha de papel, os segmentos de recta iriam encontrar-se num ponto que seria o ponto C e que se localiza "dentro" da folha de papel. A figura seguinte mostra todo o trabalho realizado.



A quase totalidade dos alunos seguiu este caminho, talvez influenciado pelo procedimento anterior e pelo recurso às isometrias. No entanto, dois alunos utilizaram um processo de resolução diferente: recorreram às semelhanças de triângulos. Fizeram algumas tentativas, querendo dividir o segmento de recta [AB] a meio e conduzindo uma paralela a [BC], mas pouco adiantava visto que também este segmento de recta "*não acaba[va]*", como se ilustra a seguir.



Quando isto aconteceu os dois alunos ficaram muito admirados. Não pareciam acreditar no que viam. O processo devia funcionar e afinal não funcionava. Porquê? Que fazer? Como sentiam que eram os únicos, na sua vizinhança, a usar este processo a sua reacção foi a de o abandonar e seguir o mesmo modo de resolução dos colegas. Sempre dá mais garantia usar o mesmo processo da maioria. Houve necessidade de intervir para manter os alunos naquele caminho, que era produtivo e, mais do que isso, era interessante pelo facto de permitir resolver o problema sem recorrer às isometrias e sem ser necessária a construção do triângulo [ABC]. Os alunos acabaram por comentar: "*Se marcarmos o ponto médio fica tudo a metade e o perímetro é também metade. Mas não dá. Os triângulos são semelhantes*". Claro que os alunos pretendiam usar as semelhanças num caso particular: a razão de proporção que escolheram era de 1/2, mas podiam escolher outras. Para isso pediu-se-lhes que reflectissem sobre os resultados que estavam a usar. Acabaram por concluir que, afinal, podia não ser assim. Podiam escolher outro ponto que não fosse o ponto médio. O importante era manter a proporcionalidade dos lados dos dois triângulos e isso podia ser conseguido traçando uma paralela, mas num outro ponto "*mais conveniente*" que o ponto médio. O ideal era um ponto que permitisse obter todo o novo triângulo dentro da folha de papel. Decidiram dividir [AB] em quatro partes iguais e tomar a primeira a partir de A. Por esse ponto traçaram uma paralela a [BC] como já tinham feito anteriormente. Assim, conseguiram obter um triângulo dentro da folha de papel, como se ilustra a seguir.



Como os triângulos [ABC] e [AB'C'] eram semelhantes visto terem um ângulo comum e os lados que o formam proporcionais, o triângulo [ABC] tem o perímetro quatro vezes maior do que o do triângulo [AB'C']. Quando os outros alunos viram este modo de resolver o problema ainda houve quem questionasse "*E pode ser?*". Pareceu-lhes estranho. Não a utilização da semelhança de triângulos, já que a tinham utilizado em outras tarefas, mas o seu recurso exclusivo. Porque terá sido assim? Talvez pelo facto dos alunos estarem ainda muito habituados e convencidos de que os problemas propostos na sala de aula devem ser resolvidos usando os últimos conteúdos trabalhados, uma concepção indicada por Schoenfeld (1992) e bastante viva nos alunos.

Algumas Conclusões

Os argumentos apresentados pelos alunos foram inseridos em quatro *Níveis*: *A*, *B*, *C* e *D*. No *Nível A* incluíram-se os que convenciam, através da interligação entre as condições iniciais e a(s) conclusão(ões), da utilização de definições, de propriedades ou/e de axiomas "locais". Os argumentos apresentados eram gerais, rigorosos, completos e resistentes. No *Nível B* consideraram-se os argumentos que, em relação ao que se estabeleceu para A, estavam de algum modo incompletos. Eram argumentos gerais, recorriam a definições e propriedades, mas podia faltar-lhes uma justificação e/ou a indicação de uma relação. No *Nível C* inseriram-se os argumentos que apenas iniciavam uma linha de argumentação geral, apresentando algumas tentativas para indicar as razões subjacentes à conjectura ou à afirmação em análise. No *Nível D* ficavam os argumentos que pareciam convencer quem os apresentava, que estabeleciam primeiro para si a validade da conjectura ou da proposição em análise, mas que continham imprecisões de raciocínio, relações inexistentes ou apresentavam esquemas incorrectos.

Na tarefa *Composição De Reflexões De Eixos Concorrentes* nenhum aluno alcançou o *Nível A*, visto que ninguém apresentou argumentos *convincentes*, *gerais, rigorosos*, *completos* e *resistentes*. Não houve produção de qualquer demonstração. Sete alunos (27%) apresentaram argumentos convincentes, gerais e rigorosos, mas não completos e por isso não resistentes, situando-se no *Nível B*. Onze alunos (42,3%) apresentaram alguns argumentos convincentes e gerais, situando-se no *Nível C*. Os argumentos e o trabalho produzido por cinco alunos (19,2%) foram considerados no *Nível D*. Os restantes três alunos (11,5%), ou não concluíram o esquema ou não conseguiram raciocinar sobre ele, pelo que se considerou que não responderam à questão. Em suma, nesta tarefa, os argumentos apresentados pela turma inserem-se maioritariamente nos *Níveis B* e *C*.

Na tarefa *Perímetro Do Triângulo*, dezoito alunos (75%) produziram demonstração, situando-se no *Nível A* e seis alunos (25%) apresentaram argumentos convincentes, gerais e rigorosos, mas não completos e, por isso, não resistentes, situando-se no *Nível B*.

O Quadro seguinte apresenta a distribuição dos argumentos apresentados pelos alunos da turma relativamente a cada tarefa e de acordo com os níveis acima definidos.

Níveis / Tarefas	A	B	C	D	n.r.
Composição das reflexões	---	27%	42,3%	19,2%	11,5%
Perímetro do triângulo	75%	25%	---	---	---

A primeira tarefa revelou-se claramente mais exigente, já que envolvia várias condições que tinham que ser devidamente justificadas. Parecia necessitar de um "olho geométrico"[3] que, por exemplo, isolasse uma parte do esquema construído para se concluir sobre a amplitude do ângulo da rotação. De facto, os alunos que concluíram correctamente foram os que "isolaram" uma parte do esquema.

A segunda tarefa revelou-se menos exigente, depois de, por eliminação de uma das condições, se ter reduzido a um problema mais simples. Pode ter acontecido que a experiência entretanto adquirida pelos alunos na resolução deste tipo de tarefas tenha influenciado positivamente o seu desempenho. De facto, esta foi uma das últimas tarefas a ser resolvidas.

A confiança está relacionada com o convencimento de cada um quanto à qualidade do trabalho realizado. Como refere Fischbein (1987) estudos que analisaram o grau de confiança que as pessoas têm nas suas próprias afirmações concluíram que, geralmente, as pessoas tendem a ser demasiadamente confiantes nas suas respostas, muito mais confiantes do que seria justificável considerando o grau de correcção das mesmas. Parece que as pessoas facilmente se convencem que o seu trabalho tem qualidade.

Na tarefa *Composição De Reflexões De Eixos Concorrentes*, surgem mais alunos que revelaram *pouca confiança* do que *muita confiança*. Durante a resolução os alunos pareceram pouco à vontade. Havia vários aspectos a considerar e o esboço, talvez porque continha partes que se sobrepunham, revelou-se difícil de analisar. Apenas dois alunos, recorrendo à estratégia de reproduzir uma das partes do esboço e de raciocinar sobre ela, conseguiram completar a relação sobre a amplitude do ângulo da rotação. Estes dados são consistentes com os que se obtiveram a partir de um questionário que se administrou após a resolução da tarefa. De facto, catorze alunos (53,8%) referiram ter *pouca confiança* no seu trabalho por considerarem que (a) a tarefa era complicada; (b)

[3] Segundo (Fujita & Jones, 2002) trata-se do poder de ver propriedades geométricas que se destacam de uma figura.

não sabiam o que fazer; (c) tentaram sem conseguir terminar; (d) tiveram dificuldades em raciocinar sobre a figura construída. Por outro lado, doze alunos (46,2%) manifestaram ter *muita confiança* no seu trabalho porque (a) trabalharam em grupo; (b) desenvolveram um raciocínio lógico e chegaram a uma conclusão que lhes pareceu verdadeira; (c) aplicaram bem conhecimentos das aulas; (d) tinham realizado uma investigação sobre o assunto.

Em relação aos conhecimentos e procedimentos que mobilizaram para resolver a tarefa, verificou-se que metade dos alunos da turma afirmou ter seguido sugestões dos colegas que os ajudaram a orientar o trabalho que vieram a realizar. Foi ainda referido que utilizaram um procedimento conhecido, apesar de tal procedimento, por si só, não permitir obter todas as respostas. Alguns alunos (quatro), que referiram ter muita confiança no trabalho realizado, consideraram que tinham utilizado um raciocínio correcto e adequado.

Na tarefa *Perímetro Do Triângulo*, a grande maioria dos alunos da turma (75%) considerou ter *muita confiança* na resolução produzida para o problema "simplificado" pelo facto de (a) terem utilizado um raciocínio correcto; e (b) terem aplicado adequadamente conhecimentos adquiridos nas aulas. Dos restantes alunos que resolveram a tarefa, apenas dois (8,3%) revelam *pouca confiança* no seu trabalho e um destes alunos justifica-a pelo facto de considerar que "*deve existir outra forma de resolver o problema, sem assinalar o terceiro vértice fora do rectângulo que representa a folha de papel*". A pouca confiança parece estar associada com a incerteza quanto ao método utilizado. Os outros quatro alunos (16,7%) revelaram *total confiança*, porque, na sua opinião (a) a tarefa era fácil; (b) utilizaram adequadamente conhecimentos já adquiridos; e (c) tinham confiança nos seus conhecimentos.

Quanto aos conhecimentos e procedimentos que utilizaram na resolução da tarefa proposta, a grande maioria dos alunos participantes (83,3%) considerou que aplicou um procedimento que já conhecia. As sugestões dos colegas surgem de novo referidas por metade dos alunos, como factor que também influencia o seu trabalho. Pode ter acontecido que mais alunos tenham seguido, nalgum momento da resolução da tarefa, sugestões dos colegas, mas não o referiram.

Segundo Fischbein (1987), as pessoas tendem a negligenciar a fragilidade do seu conhecimento e a exprimir alta confiança nas suas soluções e interpretações, mesmo quando tal não se justifica. Muitas vezes os participantes nos seus estudos revelaram maior auto-confiança em respostas erradas do que em respostas certas. Os resultados da presente investigação parecem ser consistentes com os resultados obtidos por Fischbein. Na verdade, identificaram-se alunos que em respostas "erradas" estavam confiantes e que em respostas "iniciadas" e trabalhadas correctamente, apesar de incompletas, estavam muito descrentes. Na tarefa *Perímetro Do Triângulo*, como referido, um aluno manifestou pouca confiança no trabalho que realizou, provavelmente não tanto pela qualidade do seu trabalho, mas pelo facto da tarefa ter sido "adaptada", parecendo-lhe dever existir outro modo de resolver o problema inicial.

Esta investigação parece indicar que os alunos desenvolveram competências no domínio da argumentação e da demonstração, já que experimentaram, formularam, testaram, avaliaram e reformularam conjecturas e argumentaram em favor das suas opções, procurando argumentos gerais e resistentes.

Reflexões Finais

As expectativas em relação aos professores são elevadas. Independentemente do modo como aprenderam espera-se, por exemplo, que possuam excelentes conhecimentos específicos, que os integrem e relacionem, que conheçam profundamente modos de ensinar e de aprender, que promovam um ensino dinâmico e cativante para os seus alunos, que façam uma leitura integrada do currículo, que conheçam políticas educativas, que se mantenham actualizados relativamente às tecnologias de informação, que discutam e colaborem com colegas, que partilhem experiências, que investiguem ou integrem equipas de investigação.

Mas que contribuições pode dar a formação inicial?

Esta investigação parece mostrar que a formação inicial de professores de matemática pode dar contributos significativos para que os jovens profissionais respondam às exigências do desenvolvimento do currículo actual e às expectativas acima enunciadas. Se é verdade que, em geral, muitos participantes revelaram assinaláveis dificuldades na resolução de muitas das tarefas propostas, também é verdade que a grande maioria acabou por ultrapassar muitas dessas dificuldades. Porquê? Porque usufruíram de um ambiente de formação que desafiava sistematicamente as suas competências e concepções. Porque a experiência que adquiriram na resolução das tarefas parece ter facilitado o desenvolvimento de hábitos de raciocínio, da sua confiança e da sua própria auto-estima. Porque foi possível utilizar uma didáctica que ajudou os alunos a aprenderem a mobilizar e a integrar conhecimentos, atitudes e capacidades indispensáveis para resolver problemas não rotineiros, para argumentar ou para demonstrar. Porque as aulas das disciplinas específicas de matemática foram contextos indispensáveis para que a didáctica da matemática pudesse assumir um dos seus papéis mais relevantes: "mostrar" que a matemática é uma ciência viva e um desafio constante à nossa capacidade para aprender, pensando, criando, persistindo e arriscando!

Tal como refere D'Ambrosio (1997) é necessário que, na formação inicial de professores de matemática, se acabe com a "transmissão" de conhecimentos desactualizados e que pouco têm a ver com a acção futura dos professores. D'Ambrosio propõe que, nos cursos de formação inicial de professores, as disciplinas de matemática devem revelar uma

> "matemática viva, actual, em elaboração. Os futuros mestres devem, de algum modo, ser expostos ao acto de criar matemática (…) É muito comum alunos curiosos se sentirem inibidos para perguntar de que maneira se podem tratar coisas que eles encontram no seu dia-a-dia. Isso é grave nos níveis elementares e particularmente grave nos cursos universitários. Mais atenção deve ser dada à curiosidade dos alunos" (pp. 76-78).

O desenvolvimento da presente investigação mostra que esta recomendação de D'Ambrosio é passível de ser concretizada. Um ambiente de formação que suscite problemas, promova a curiosidade e o interesse dos alunos, valorize o questionamento, discuta fragilidades dos raciocínios apresentados, parece ser incontornável se pretendermos desenvolver nos alunos competências no âmbito da argumentação e da demonstração em matemática. Tal ambiente poderá contribuir para que a necessidade de demonstrar possa ser mais intrínseca, reconhecendo-se a sua contribuição para a total compreensão do problema. Ao desenvolverem competências no domínio da argumentação e da demonstração, os futuros professores terão melhores condições para criarem ambientes de aprendizagem que encorajem os seus alunos a explorar, a formular e testar conjecturas, a demonstrar, a discutir e a aplicar os resultados das suas investigações. Por isso mesmo Jiang & McClintock (1997), também consideram que precisamos de proporcionar "ambientes deste tipo" aos futuros professores. Ou seja, parece ser necessário que a argumentação e a demonstração integrem sistemática e regularmente o trabalho didáctico dos professores.

Em suma, é essencial alterar e melhorar substancialmente a formação inicial de professores para que os seus alunos venham a aprender matemática de forma mais significativa, mais profunda e mais reflectida. Como é referido nas *Normas Profissionais Para O Ensino Da Matemática* e como os resultados desta investigação parecem corroborar, "devemos ser suficientemente impacientes para actuar e suficientemente pacientes para manter os nossos esforços até ver resultados" (NCTM, 1991, p. 202).

Referências

Abrantes, P. Serrazina, L & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: the case of mathematical proof. Em Alan J. Bishop *et al*. (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp.175-192). Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Balacheff, N. (1999). *Es la argumentación un obstáculo?* [On-line] Disponível: (http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/result2.html)

Biehler, R. (1994). Teacher Education and Research on Teaching. Em Rolf Biehler, Roland Schlz, Rudolf Stäßer, Bernard Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. London: Kluwer Academic Publishers.

Borralho, A. (1997). O ensino da resolução de problemas de Matemática por parte de futuros professores: relações com a sua formação inicial. Em D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho, I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Carrillo, J. e Contreras, L. (2000). El amplio campo de la resolución de problemas. In José Carrillo Yánez e Luís Carlos Contreras (Eds.), *Resolución de Problemas en les Albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Huelva: Hergué, Editora Andaluza.

Chapman, O. (2000). Mathematics teachers´belief about problem solving and teaching problem solving. Em José Carrillo Yánez e Luís Carlos Contreras (Eds.), *Resolución de Problemas en les Albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos*. Huelva: Hergué, Editora Andaluza.

Chazan, D. (1990). Students´Microcomputer-aided Exploration in geometry. *Mathematics Teacher,* 83(8), 628-635.

Conney, T. (1994). On the application of Science to Teaching and teacher Education. Em Rolf Biehler, Roland Schlz, Rudolf Stäßer, Bernard Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. London: Kluwer Academic Publishers.

Davis, P. (1998). Fidelity in Mathematical Discourse: is one and one really two? Em Thomas Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Davis, P. e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

D´Ambrosio, B. (1997). Learning About Teaching by Engaging in Inquiry. Em Domingos Fernandes, F. Lester, Jr., A, Borralho, I. Vale (Eds.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can ´t prove. *Educational Studies in Mathematics,* 38, 85-109.

Drouhard, J.P., Sackur, C., Maurel, M., Paquelier, Y. e Assude, T.. *(*1999). Necessary Mathematical Statements and aspects of Knowledge in the Classroom*. Philosophy of Mathematics Education* [On-line]. Disponível em: http://www.ex.ac.uk/~Pernest/pome11/art8.htm

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration*.* *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 233-261

Duval, R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer: continuity ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Fernandes, D. (1997). Introdução. Em D. Fernandes, F. Lester, Jr., A, Borralho, I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematic*s: *an educational approach*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company

Fonseca, L. (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: concepções e processos utilizados* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Fonseca, L. (2002). “Olha p´ro que eu digo mas não olhes p´ro que eu faço”. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, A. Dionísio (Org.), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação dos Professores*. Lisboa: S.P.C.E., Secção de Educação e Matemática.

Franco de Oliveira, A. (1995). *Geometria Euclidiana*. Lisboa: Universidade Aberta.

Greenberg, M. (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. New York: W. H. Freeman and company.

Goetting, M (1995). The college students´understanding of mathematical proof. (Doctoral dissertation, University of Maryland, 1995). *Dissertations Abstracts International*, 56, 3016A.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Types of Students´ Justifications. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Hiebert, J. & Carpenter , T. (1992). Learning and Teaching with Understanding? Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Jackiw, N. (1995). *The Geometer´s Sketchpad*. Berkeley: Key Curriculum Press.

Jiang, Z. e McClintock, E. (1997). Using the Geometer’s Sketchpad with Preservice Teachers. Em J. King e D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned on, Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington: The Mathematical Association of America

Jones, K. (1997). Student-teachers´conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, *9*, 21-32.

Kloosterman, P. e Mau, S. (1997). Is this Really Mathematics? Challenging the Beliefs of Preservice Primary Teachers. Em D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho, I. Vale (eds.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Knuth, E. (2000). The rebirth of proof in school mathematics in the United States. *ProofNewsletter* [On-line]. Disponível em: http://www-cabri.image.fr/Preuve/Newsletter/000506

Lester, F. (1997). Mathematics Teacher Education at Indiana University: Twenty-five Years of Innovative Practice. Em Domingos Fernandes, F. Lester, Jr., A, Borralho, I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Martin, W. G. e Harel G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 41-51.

Mason, J., Burton, L. e Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically*. Wokingham: Addison-Wesley Publishing Company.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico, Competências Essenciais*. Lisboa: DEB

Mogetta, C. (2000). Cabri as a cognitive tool for evolution of a sense of proving. Em T. Rowland e C. Morgam (Eds.), *Research in Mathematics Education* (vol. 2) (p. 107-124). London: British Society for Research into Learning Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM.[Tradução portuguesa: Normas profissionais para o ensino da matemática. Lisboa: APM/IIE, 1994].

O´Daffer, P. e Thornquist, B. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning, and proof. Em Patricia S. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*. NCTM, Research Interpretative Project.

Retzer, K. (1996). A geometry Proof Making Model. Em Proceedings of Topic Group 8: *Proofs and Proving: Why, When and How?* Durban: Association for Mathematics Education of South Africa.

Schoenfeld, A. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, *23*(2), 145-166.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior*, *18* (2), 191-210

Simom, M. e Blume G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Thompson, A. (1985). Teacher´s Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving. Em E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiples Research Perspectives*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Tymoczko, T. (1998). The Four-Color problem and its Philosophical Significance. Em Thomas Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. Em D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho, I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Mastemática. Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Villani, V. (1998). The Way Ahead. In C. Mammana e V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Kluwer Acdemic Publishers.