2

Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática

Carlos A. Braumann
Centro de Investigação em Matemática e Aplicações[1]
Universidade de Évora
braumann@uevora.pt

Introdução

O XI Encontro de Investigação em Educação Matemática escolheu como tema a investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. Considero este tema da maior importância. Por isso e por ser professor e investigador por vocação, quando a comissão organizadora me pediu um testemunho sobre a investigação matemática e sobre o seu papel na aprendizagem da matemática, aceitei entusiasmado e agradecido.

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detectivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Há quem diga que Matemática é demonstração. Não fujamos das demonstrações. Elas são essenciais para se perceber a essência da Matemática e não podem ser substituídas por exemplos ou ilustrações (fazê-lo induz os estudantes a pensar que tal é um método de demonstração logicamente aceitável). Quando a demonstração seja complicada e não se queira fazer, haja a honestidade de o dizer.

Dizer que a Matemática é demonstração é verdade, uma verdade essencial, mas só uma pequena parte da verdade. Antes de demonstrar uma proposição matemática (teorema), é preciso enunciar o teorema a demonstrar. Como se chega lá? Qual o interesse que tem esse teorema? Que problema é que ele resolve? Que mecanismos intuitivos, associados por vezes a métodos de tentativa e erro, que razões estéticas até, nos levam a pensar que a proposição é verdadeira? E, depois de sabermos o que queremos demonstrar, que estratégia usar para o demonstrar?[2]

Uma outra parte da Matemática é a de construir teorias ou modelos matemáticos para estudar certas realidades ou fenómenos da natureza. Esses modelos devem ser suficientemente simples para poderem ser formulados numa linguagem matemática e ser estudados matematicamente e suficientemente apropriados para permitirem resultados úteis para a compreensão do fenómeno e para a previsão do seu comportamento futuro e das consequências de uma intervenção sobre o mesmo.

Os problemas e projectos, mesmo simples, principalmente quando ligados à vida quotidiana ou à descrição de fenómenos naturais[3], permitem o exercício da modelação matemática, ou seja, a transposição para uma linguagem matemática adequada seguida do seu estudo por métodos matemáticos e da interpretação dos resultados em termos da realidade modelada. Esta componente desenvolve uma faceta investigativa aplicada essencial para perceber a função e utilidade da Matemática e para nos dotar de um poderoso instrumento de análise e intervenção. Desenvolve ainda o espírito científico e mostra que em Ciência não há compartimentos isolados e que a Matemática alimenta e é alimentada pelo desenvolvimento científico e tecnológico. Esquecer esta simbiose, como frequentemente nós, professores de Matemática, fazemos, é matar a Matemática do seu principal alimento e motivação, fazendo a Matemática parecer um mero jogo intelectual que busca a autosatisfação dos que com ele se deleitam. Não que, em si, isso tenha algum mal[4]. O problema está se deixamos que o ensino seja monopolizado por esse jogo, com o qual muitos se não deleitam nem vêem nele qualquer interesse ou utilidade, cedo se afastando em definitivo.

Como aprender Matemática, o mesmo é dizer, como aprender a fazer investigação matemática? Vendo fazer e FAZENDO! A simples repetição do que vimos fazer (ainda que com mudanças cosméticas) ou o simples "marrar" podem ajudar a consolidar certas rotinas úteis mas, só por si, não levam "a carta a Garcia".

Pediram-me para falar um pouco da minha experiência de investigador, procurando assim dar um testemunho, necessariamente de carácter pessoal, sobre a actividade de investigação matemática. Para isso, socorrer-me-ei de dois exemplos, um muito antigo (quando era estudante do ensino secundário), outro recente. Dar conta dos processos mentais que subjazem ao trabalho de investigação implica uma sempre difícil auto-análise, pelo que o leitor deve olhar este relato como sendo aquilo que o autor julga ter ocorrido. Incluirei também uma referência à divulgação e validação dos resultados da investigação na comunidade científica.

Não resisto a terminar com algumas considerações sobre as dificuldades que a educação matemática actualmente atravessa.

Um testemunho pessoal de uma investigação escolar elementar

Uma experiência de uma investigação trivial, mas que me deu particular satisfação, vem do ensino secundário, quando fui (há muitos anos) aluno de uma turma especial ("Matemática Moderna") para testar um novo programa curricular coordenado nacionalmente pelo Prof. Sebastião e Silva. Os números complexos faziam parte do programa.

Considere-se um complexo $z=x+iy$ (x e y reais). Suponhamos que $z\neq 0$. Então, ele pode ser representado na forma trigonométrica $z = r \operatorname{cis}\theta$ (representação unívoca se tomarmos $r>0$, $0\leq\theta<2\pi$), onde $\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Note-se que cis é uma função periódica de período 2π e que $\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2) = (\operatorname{cis}\theta_1)(\operatorname{cis}\theta_2)$.

Seja $n>1$ natural, $r^{1/n}$ a única raíz real positiva de índice n de r e $w_{k,n} = \operatorname{cis}(2k\pi/n)$. As n raízes de índice n de z são dadas pela expressão $r^{1/n}\operatorname{cis}(\theta/n)w_{k,n}$, com $k=0,1,\ldots,n-1$ ([5]). Tal reconhece-se facilmente, pois

$$\left(r^{1/n}\operatorname{cis}(\theta/n)w_{k,n}\right)^n = r\operatorname{cis}(n\theta/n)\operatorname{cis}(n2k\pi/n) = r\operatorname{cis}(\theta+2k\pi) = r\operatorname{cis}\theta = z$$

Claro que, nas aulas e nos trabalhos para casa, fizemos alguns exercícios para calcular raízes de números complexos concretos e, em todos os casos, verifiquei que a soma das n raízes de um complexo $z\neq 0$ era nula. Não podia ser coincidência. Se considerarmos a interpretação geométrica de um complexo como um vector que une a origem ao ponto que o representa no plano de Argand e a adição de complexos como a adição desses vectores, vemos que as n raízes de um complexo formam (ver Figura 1) raios da circunferência de centro na origem e raio $r^{1/n}$ orientados para o exterior desta e dividindo a circunferência em n ângulos iguais. Se imaginarmos esses vectores como forças aplicadas na origem, a sua simetria circular implicaria intuitivamente que a força resultante, a soma vectorial das forças aplicadas, tivesse um efeito nulo. Essa era uma explicação intuitiva do resultado, que reforçava consideravelmente a convicção da sua verdade universal, mas não era uma demonstração.

Claro que bastava demonstrar a propriedade para as n raízes da unidade $w_{k,n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$ (técnica da redução do problema a outro mais simples). Com efeito, as raízes de z obtêm-se multiplicando as da unidade pela constante $r^{1/n}\operatorname{cis}(\theta/n)$.

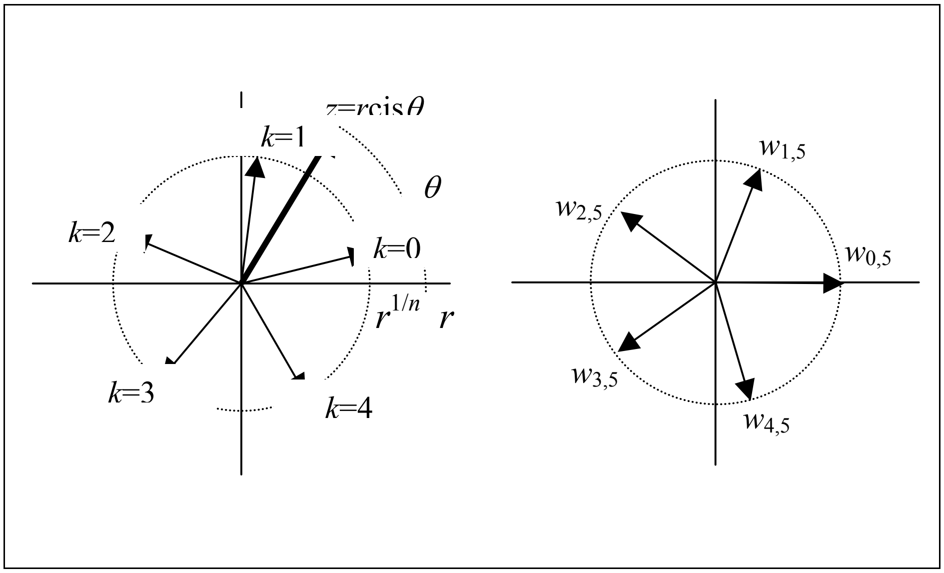

Figura 1. As 5 raízes (correspondentes a k=0,1,2,3,4) de índice n=5 de um complexo $z = r \text{ cis } \theta$ (à esquerda) e as 5 raízes $w_{k,5}$ (k=0,1,2,3,4) da unidade (à direita). As raízes da figura à esquerda obtêm-se multiplicando por $r^{1/n} \text{ cis } (\theta / n)$ as raízes da figura à direita.

O problema reduzia-se então a demonstrar que $S = \sum_{k=0}^{n-1} w_{k,n} = 0$.

Para n par, a demonstração era fácil, bastando organizar as raízes em pares correspondentes a vectores com sentidos opostos. Com efeito, $w_{j,n}+w_{j+n/2,n}=0$ (j=0,1,…,n/2–1) pois é a soma de vectores de comprimento unitário e sentidos opostos; a mesma conclusão se obteria algebricamente, atendendo a que

$$\begin{aligned} \text{cis}\,(2(j+n/2)\pi/n) &= \text{cis}\,(2j\pi/n+\pi) = \cos(2j\pi/n+\pi) + i \text{ sen }(2j\pi/n+\pi) \\ &= -\cos(2j\pi/n) - i \text{ sen }(2j\pi/n) = -\text{cis}\,(2j\pi/n). \end{aligned}$$

Para n>1 ímpar, as coisas pareciam mais difíceis e, de facto, deram muita luta. Mas geometricamente vê-se (ver Figura 2) que as raízes de índice n da unidade são também raízes de índice $2n$, embora haja naturalmente mais raízes de índice $2n$, que alternam na posição geométrica com as primeiras. Com efeito, temos $w_{k,n}=w_{2k,2n}$. Ora, já sabemos que a soma de todas as raízes de índice $2n$ (que é par) é nula, isto é, $\sum_{j=0}^{2n-1} w_{j,2n} = 0$. Daqui conclui-se que a soma $\sum_{j=0,2,\ldots,2n-2} w_{j,2n}$ das raízes de índice $2n$ com j par (que coincide – basta pôr j=$2k$ – com a desejada soma das n raízes de índice n, isto é, com $S = \sum_{k=0}^{n-1} w_{k,n}$) será igual a menos a soma

$\sum_{j=1,3,\ldots,2n-1} w_{j,2n}$ das raízes de índice $2n$ com j ímpar. Mas isso ajuda pouco se não conhecermos esta última soma (que é, como vimos, igual a $-S$) e não vislumbrava meio de a obter. Reparei mais tarde que cada raíz de índice $2n$ com j ímpar se obtinha rodando a raíz com $j-1$ (que é par) de um ângulo de $2\pi/(2n)=\pi/n$ no sentido anti-horário (ver Figura 2). Ora uma rotação de ângulo φ (neste caso, o ângulo seria $\varphi=\pi/n$) corresponde algebricamente à multiplicação por cis φ (neste caso, por cis(π/n)). Vi, por observação geométrica, aquilo que é também óbvio por cálculos algébricos elementares: $w_{j,2n}=w_{j-1,2n}\mathrm{cis}(\pi/n)$. Isto é, para obter a soma das raízes de índice $2n$ com j ímpar, bastava pegar na soma das raízes pares e multiplicá-la por cis(π/n). Logo $-S=S\mathrm{cis}(\pi/n)$, donde $S=0$, como pretendia mostrar.

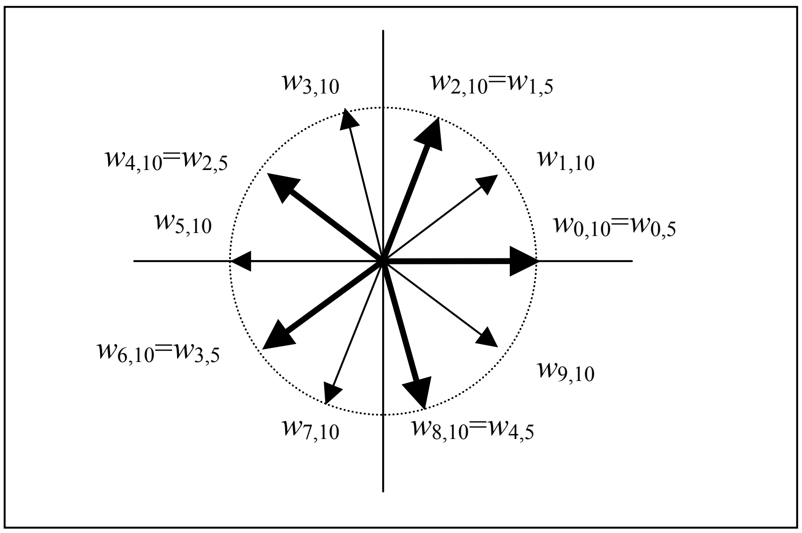

Figura 2. Ilustração para o caso n=5. As raízes $w_{k,5}$ de índice 5 da unidade coincidem com as raízes "pares" $w_{2k,10}$ de índice 10 da unidade (a traço grosso). As restantes raízes ("ímpares") de índice 10 da unidade (a traço fino) obtêm-se rodando as raízes "pares" de um ângulo $\pi/5$.

A demonstração funciona, mas é rebuscada. Mais tarde, descobri, quase por acaso, uma muito mais simples, notando que, para qualquer n>1 natural, vem $w_{j,n}=\alpha^j$ com $\alpha=w_{1,n}$. Então a soma das n raízes de índice n da unidade é simplesmente a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\alpha\neq 1$ e de primeiro termo $\alpha^0=1$, ou seja, é igual a

$$\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1-1}{1-\alpha}=0\,,$$

já que $\alpha^n = w_{n,n} = cis(2n\pi/n) = 1$.

Talvez se já conhecesse que cis$\theta = e^{i\theta}$, que permitiria escrever $w_{k,n} = e^{i2k\pi/n} = (e^{i2\pi/n})^k$, tivesse visto imediatamente que a soma das raízes de índice n era a soma dos termos de uma progressão geométrica. Eis a importância de uma boa notação[6].

Claro que o facto, aliás trivial[7], da soma das raízes ser nula já era conhecido. Com efeito, encontrei-o, muito mais tarde, julgo que como exercício não resolvido de algum livro. Mas, na altura, isso funcionou como uma descoberta e a sua demonstração foi um desafio que deu luta e deu gozo vencer.

Aqui, a "descoberta" fez-se por acaso. Relatarei agora um exemplo de investigação relativamente recente em que funcionou a intuição informada (isto é, baseada numa certa experiência da matéria), e não tanto o acaso, para conjecturar o resultado a demonstrar. Trata-se de investigação matemática aplicada em problemas de crescimento populacional e de pescas. Para a apresentar, porém, é preciso pôr o leitor a par de alguns antecedentes.

O modelo malthusiano de crescimento populacional

O modelo matemático mais natural para descrever o crescimento de uma população animal (ou de bactérias) sem migrações, vivendo num ambiente constante e sem limitações alimentares ou territoriais, é o modelo de crescimento malthusiano (em homenagem a Malthus). Para o descrever, representemos por $N=N(t)$ o tamanho da população no instante $t \geq 0$ e seja $N(0)=N_0>0$ a população inicial. Neste modelo supõe-se que a taxa instantânea (velocidade) de crescimento do tamanho da população, isto é, a derivada d $N(t)$/d t, deverá ser proporcional ao próprio tamanho da população, pelo que d $N(t)$/d $t = rN(t)$, onde r é a constante de proporcionalidade. Neste modelo, a taxa de crescimento *per capita*[8] (instantânea) $Y(t) = (dN(t)/dt) / N(t)$, que é a taxa de crescimento da população dividida pelo seu tamanho, é a constante r, não sendo por isso influenciada pelo tamanho da população.

A equação diferencial d $N(t)$/d $t = rN(t)$ é fácil de resolver, visto que $(1/N(t))\,(dN(t)/dt) - r = d\,(\ln N(t) - rt)/d\,t = 0$ (há que usar a regra de derivação da função composta), donde resulta que $\ln N(t) - rt$ é constante. Considerando o valor que toma em $t = 0$, essa constante só pode ser $\ln N_0$, pelo que $\ln N(t) - rt = \ln N_0$, daí resultando o comportamento exponencial $N(t) = N_0\, e^{rt}$.

Este mesmo modelo matemático pode ser utilizado para descrever um fenómeno aparentemente muito diferente (na realidade, não é tanto assim, já que é um fenómeno que, tal como o crescimento populacional, é de natureza multiplicativa), como seja o capital $N(t)$ de um depósito bancário de capital inicial

N_0 com juro composto continuamente no tempo e com taxa de juro (instantânea) constante r>0. Num depósito a prazo típico por determinado período renovável P, o juro acresce ao capital no final de cada período, vindo $N(t)=N_0(1+rP)^{\mathrm{INT}(t/P)}$ (9); o período pode ser um ano, um semestre, um trimestre, um mês, mas podemos imaginar qual seria a situação limite se o período fosse cada vez mais curto (tendendo para zero) e, portanto, o juro fosse composto continuamente no tempo. Com t fixo, como $k=1/P\rightarrow+\infty$, viria $(1+r/k)^{kt-1}< (1+rP)^{\mathrm{INT}(t/P)}\leq(1+r/k)^{kt}$ e, como $(1+r/k)^k\rightarrow e$, viria $N_0(1+rP)^{\mathrm{INT}(t/P)}\rightarrow N_0\, e^{rt}$, ou seja, obteríamos a solução do modelo malthusiano $N(t) = N_0\, e^{rt}$ (10).

O modelo logístico como aperfeiçoamento do modelo anterior

Note-se que, no modelo malthusiano, a taxa de crescimento *per capita* $Y(t)$ é constante (sempre igual a r). Na realidade, à medida que a população aumenta, os recursos alimentares e territoriais disponíveis para cada indivíduo sobreviver e se reproduzir diminuem, pelo que a taxa de crescimento *per capita* terá tendência a diminuir, tanto mais quanto maior for a população. O modelo mais simples consiste em supor que a taxa de crescimento *per capita*, em lugar de ser uma constante r, diminui proporcionalmente ao tamanho da população (ver Figura 3), isto é $(1/N(t))\,(\mathrm{d}\,N(t)/\mathrm{d}\,t) = r - a\,N(t)$, donde

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

(onde $K = r/a$). É conhecido como modelo *logístico* (supomos r>0 e K>0).

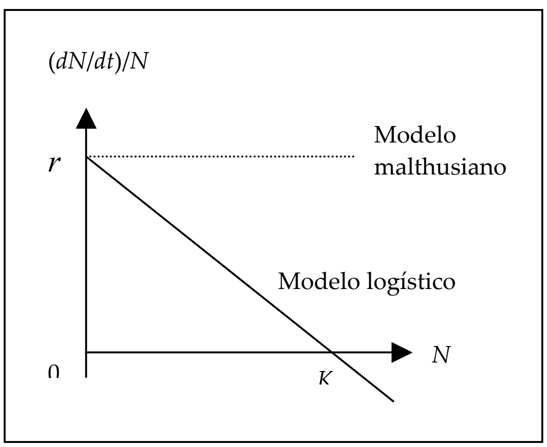

Figura 3. Comparação da taxa de crescimento *per capita* entre os modelos malthusiano e logístico

A proporcionalidade pode ser justificada utilizando argumentos biológicos razoáveis mas não seguros. É fácil ver que, quando a população tiver o tamanho K, a taxa de crescimento $\mathrm{d}\,N(t)/\mathrm{d}\,t$ é nula, isto é, a natalidade e a mortalidade equilibram-se. Temos um ponto de equilíbrio da equação diferencial, a que se chama *capacidade de sustento do meio*. Esse equilíbrio é assintoticamente estável, no sentido de que, se o tamanho da população se afastar dele (sem ser demasiado, como seria se a população se extinguisse!), esse tamanho voltará a aproximar-se do valor de equilíbrio à medida que o tempo passa. Já o equilíbrio (extinção) N=0 (também para este tamanho da população a taxa de crescimento é nula) não é estável, pois, se houver uma pequena imigração que torne o tamanho da população positivo, ela crescerá até atingir o valor K, afastando-se de 0.

Com o recurso à mudança de variável $Z(t) = 1/N(t)$ e à regra da derivação da função composta, não é difícil de obter (com algum trabalho)

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}},$$

o que permite concluir que, caso $N_0>0$, vem $N(t)\to K$ quando $t\to+\infty$.

Como exemplo, apliquemos aos resultados das experiências de Gause[11] com uma população de *Paramecium Caudatum* em meio de cultura (ver Figura 4). É óbvio que o crescimento não se apresenta como exponencial e que o modelo malthusiano não se ajustaria (salvo enquanto o tamanho da população se manteve em valores baixos), mas o modelo logístico parece ajustar-se razoavelmente. Naturalmente, a realidade e o modelo logístico (que é uma mera aproximação de uma realidade mais complexa) não coincidem exactamente. Há oscilações um tanto ou quanto aleatórias que o modelo não contempla.

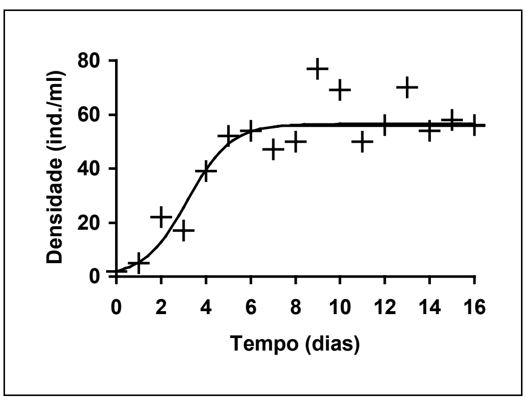

Figura 4. População de *Paramecium Caudatum*; dados das experiências de Gause (+) e ajustamento (curva) do modelo logístico com r=1,04/dia, K=56,5 ind./ml e $N(0)$=2 ind./ml

Note-se que há outros modelos similares que também se ajustam razoavelmente e que também supõem que a taxa de crescimento *per capita* diminui com o tamanho da população, mas de formas diferentes da diminuição proporcional a tal tamanho; também para certos desses modelos há argumentos biológicos razoáveis (embora diferentes dos utilizados para justificar o modelo logístico).

Extensão do modelo logístico para o caso de a população estar sujeita a pesca

O modelo logístico e modelos similares têm sido utilizados para modelar o crescimento natural[12] de um determinado "stock" de peixes sujeito a pesca. Agora, porém, temos de subtrair a taxa de capturas. É razoável supor que ela é proporcional ao tamanho da população se a pesca estiver sujeita a regras fixas e a frota pesqueira tiver características e tamanho fixos. Obtemos o modelo de Gordon-Schaeffer

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t),$$

onde a constante $E \geq 0$ é o esforço ("líquido") de pesca e depende das características da frota e das regras. O problema da determinação do valor de E que optimiza a taxa de capturas em situação sustentada (isto é, em equilíbrio assintoticamente estável) é uma boa aplicação de métodos de determinação de máximos e mínimos de funções.

Verifica-se (ver Figura 5) que existe um equilíbrio assintoticamente estável com população positiva $\hat{N} = K(1 - E/r)$ ([13]) quando o esforço ("líquido") de pesca E é inferior a r; neste caso, há um outro equilíbrio (o correspondente à extinção), mas não é estável, o que significa que, se a população estiver extinta e não for perturbada continuará extinta (é um equilíbrio), mas se sofrer uma pequena perturbação (uma pequena imigração), irá crescer afastando-se desse equilíbrio e aproximando-se do equilíbrio estável acima referido. Em conclusão, se $E<r$ e a população não estiver extinta, ela aproximar-se-á do equilíbrio estável $\hat{N}$, isto é, virá $N(t) \to \hat{N}$ quando $t \to +\infty$. Caso, porém, $E>r$, o único equilíbrio é o da extinção e é assintoticamente estável, pelo que $N(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Que sucederá, porém, se o ambiente onde a população de peixes se situa não for perfeitamente determinístico, mas sofrer oscilações aleatórias resultantes de flutuações no clima, na disponibilidade de alimentos, na predação a que está sujeita, nas doenças que sofre ou em tantos outros factores que afectam as taxas de natalidade e mortalidade.

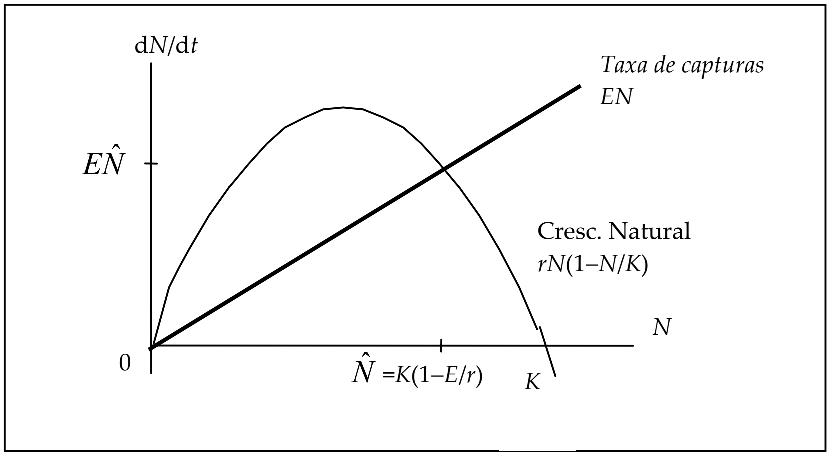

Figura 5. Modelo de Gordon-Schaeffer com $E<r$.

Modelação para ambientes aleatórios

Um modelo razoável para a contemplar essas oscilações aleatórias é presumir que a taxa de crescimento natural *per capita* tem um valor médio e é perturbada por um "ruído"[14], que vamos supor ser branco e gaussiano[15]. Representando por $\varepsilon(t)$[16] o ruído branco gaussiano padrão e por $\sigma>0$ a intensidade do efeito das perturbações aleatórias, a taxa de crescimento natural *per capita* não será $r(1-N(t)/K)$ mas $r(1-N(t)/K)+\sigma\varepsilon(t)$ e o modelo fica a ser a equação diferencial estocástica[17]

$$\frac{dN(t)}{dt}=\left(r\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)+\sigma\varepsilon(t)\right)N(t)-EN(t)\ .$$

A solução da equação é agora mais complicada e depende também do "acaso". Pode, porém, provar-se, com relativa facilidade, que ela existe e é única. Pode também provar-se que, se $E>r$, a população se extingue[18] e que, se $E<r$, a população não se extingue[19].

E será que, no caso $E<r$ (equivalentemente, podemos dizer no caso $E/r<1$), vamos ter um equilíbrio estável como acontecia no modelo determinístico? Tal não sucede porque as perturbações aleatórias do ambiente tendem a alterar o tamanho da população não a deixando estabilizar. Mas será que existe estabilidade num sentido probabilístico? Isto é, será que, embora o tamanho da população não estabilize, a distribuição de probabilidade $F_t(n)$ do tamanho da população estabiliza numa certa distribuição de probabilidade $\hat{F}(n)$, chamada distribuição estacionária, quando $t\to+\infty$. Se assim for, dado qualquer intervalo $[a,b]$, vem que a probabilidade $F_t(b)-F_t(a)$ de $N(t)$ estar nesse intervalo tende para $\hat{F}(b)-\hat{F}(a)$ quando $t\to+\infty$ (isto é, estabiliza). De facto, assim é. Isso permite ter taxas de captura EN que, embora variáveis, têm distribuição de probabilidade conhecida e características, como o valor médio ou a variância, estáveis. Podemos mesmo, escolhendo um esforço de pesca adequado E, optimizar a taxa de capturas média em situação estável[20].

O testemunho pessoal de uma investigação mais recente

O problema que se me pôs é o de saber o que sucederia se o crescimento natural da população não seguisse o modelo logístico mas algum outro modelo mais complexo, desde que biologicamente razoável. Afinal, nós não sabemos qual exactamente o modelo seguido na natureza. Experiências com modelos similares ao logístico deram[20] resultados semelhantes, devendo, porém, comparar-se o esforço de pesca E com a taxa de crescimento natural *per capita* que se obtém quando o tamanho da população tende para zero. Note-se que, no modelo logístico, a taxa de crescimento natural *per capita* é $r(1-N(t))$ e o seu limite quando o tamanho da população tende para zero é r.

Será que tivemos sorte nas experiências que fizemos ou este é um resultado geral? Claro que a convicção de que era um resultado geral era inabalável. Era uma certeza interior. Em Matemática, porém, só se pode dar como certo aquilo que se prova. E o meu objectivo era provar os resultados anteriores quando a taxa de crescimento natural *per capita* fosse arbitrária, desde que satisfazendo condições ditadas pela própria Biologia (havia contra-exemplos para taxas totalmente arbitrárias, mas todos biologicamente aberrantes). Supus, assim, que a taxa de crescimento natural *per capita* era uma função $g(N)$ qualquer[21], desde que suave (de classe C^2) e verificando a propriedade biológica de ser uma função estritamente decrescente do tamanho da população. Tinha ainda de satisfazer as propriedades biológicas de se ter $\lim_{N \downarrow 0} g(N) > 0$ ([22]), $\lim_{N \to +\infty} g(N) < 0$ ([23]) e $\lim_{N \downarrow 0} Ng(N) = 0$ ([24]). Algumas destas suposições seriam talvez desnecessárias mas, se não viessem a fazer falta na demonstração, poderia descartá-las posteriormente. Tal não veio a suceder. Claro que, às vezes, sucede o inverso e, para conseguirmos chegar à tese do teorema, temos de acrescentar hipóteses inicialmente não previstas, sem as quais não conseguimos completar a demonstração.

Note-se que, no modelo estocástico, a taxa de crescimento natural *per capita* não é $g(N(t))$ mas $g(N(t))+\sigma\varepsilon(t)$, pelo que, rigorosamente, quando falamos de g, devemos usar o termo "taxa média de crescimento natural *per capita*". Aqui, o termo "média" é uma média geométrica[25].

Tinha agora uma conjectura, isto é, um enunciado para um possível teorema:

Consideremos os modelos determinístico e estocástico

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(N(t))N(t) - EN(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \big(g(N(t)) + \sigma\varepsilon(t)\big)N(t) - EN(t),$$

com $\sigma>0$ *e* $E\geq 0$ *e com* g *satisfazendo as condições acima descritas. Seja* $r = \lim_{N\downarrow 0} g(N)$.

Então, em qualquer dos modelos, se E>r, ocorre a extinção[18] *e, se E<r, não ocorre extinção*[19]*. Caso E<r, no modelo determinístico existe um equilíbrio estável positivo e, no modelo estocástico, existe uma densidade estacionária para a qual converge a distribuição de probabilidade do tamanho da população quando* $t\to+\infty$.

A verificação destas propriedades tinha a ver com certos integrais (em que intervinham $g(N)$, σ e EN) serem ou não finitos. Claro que, quando a função g era uma função concreta, como no modelo logístico e nos outros que experimentei, os integrais podiam ser calculados e assim se determinava em que condições de E e de r é que eram finitos ou infinitos. Mas, no caso geral, isso não podia ser feito. Mesmo assim, por majorações ou minorações adequadas dos integrais, tirando partido das propriedades da função g e com muita persistência, recorrendo à bagagem de "truques" que a experiência nos vai dando, foi possível determinar condições de E e de r para as quais eles eram finitos e condições para as quais eles eram infinitos. E o teorema foi demonstrado.

Mas, perguntei então, que sucede se a política de pesca não for de esforço constante E, mas de esforço variável $E(N)$ (suposta função não-negativa de classe C^2)? Será que o resultado se mantém neste caso mais geral?

Mas o que deve agora desempenhar o papel da constante E? Naturalmente, o limite $\lim_{N\downarrow 0} E(N)$. Pode, porém, ocorrer que este limite e r sejam ambos infinitos, caso em que nada se resolveria, embora se pudesse resolver porque o quociente podia ser uma indeterminação "levantável". Nesse sentido, como $E<r$ [$E>r$] equivale a $E/r<1$ [$E/r>1$], a ideia será trabalhar com o limite do quociente $h = \lim_{N\downarrow 0}\big(E(N)/g(N)\big)$, ficando com os casos $h<1$ e $h>1$. O caso $h<1$ tem a interessante interpretação que o esforço de pesca deve ser menor que a taxa média de crescimento natural *per capita* quando a população é pequena; se assim for, evita-se a extinção e tem-se um equilíbrio estável ou uma densidade estacionária, conforme o modelo seja determinístico ou estocástico. Se $h>1$, isto é, se, quando a população é pequena, o esforço de pesca for superior à taxa média de crescimento natural *per capita*, a população extingue-se. Não foi muito difícil adaptar a demonstração para cobrir esta extensão do resultado anterior, generalizando assim o teorema atrás enunciado[26].

No que se refere à extinção, o resultado do teorema tem agora uma expressão tão óbvia que quase se poderia dizer que isso era o que teríamos previsto por mero bom senso, sem Matemática[27]. Nem sempre é assim, o que parece óbvio pelo bom senso é, por vezes, falso, e o que o bom senso nem suspeita ou pensa que é incorrecto é, por vezes, verdadeiro; e, sem Matemática, nunca saberíamos se um destes casos estaria a ocorrer ou não.

Finalmente, surge a pergunta natural: E se, no modelo estocástico, ao contrário do que todos os autores supõem (por simplicidade), a intensidade do efeito das perturbações aleatórias do ambiente sobre a taxa de crescimento natural *per capita* não for uma constante σ como acima supusemos, mas puder ser ela própria variável, da forma $\sigma(N)$, função positiva de classe C^2. De facto, a sensibilidade da taxa de crescimento aos efeitos das flutuações ambientais poderá depender do tamanho da população, havendo certos tamanhos mais críticos. É quase certo que alguma dependência se verificará na natureza.

Tentámos demonstrar os mesmos resultados para este caso mais geral. Infelizmente, não conseguíamos ver se os integrais que aparecem na demonstração eram finitos ou infinitos para as condições $h<1$ e $h>1$. O problema é que, ao contrário do caso de σ constante, $\sigma(N)$ podia disparar para valores infinitos nos limites quando $N\downarrow 0$ ou quando $N\to+\infty$, estragando as majorações ou minorações dos integrais que havíamos utilizado na demonstração anterior, isto embora não tivéssemos conseguido arranjar um contra-exemplo.

Felizmente, com a hipótese biologicamente razoável de $\sigma(N)$ ser uma função limitada, as demonstrações anteriores, com algumas adaptações, funcionavam. Mais tarde, verificámos, modificando um tanto o esquema da demonstração, que nem isso era preciso, bastando que $\sigma(N)$ satisfizesse certas condições técnicas mais fracas. E, foi com essas condições, que resolvemos apresentar o novo teorema (extensão do teorema anterior) ao público numa revista da especialidade[28].

A publicação em revistas científicas e o sistema de arbitragem

Este último resultado já é de 2000, mas as revistas científicas levam muito tempo a publicar e só saiu em Maio de 2002. Primeiro, o artigo submetido é enviado a dois árbitros anónimos (*referees*), devendo o editor da revista escolher duas pessoas competentes na matéria que estejam disponíveis para fazer esse trabalho. Essas pessoas são também investigadores, normalmente sobrecarregados de trabalho, pelo que o processo leva o seu tempo. Os árbitros dão a sua opinião sobre se o artigo deve ser publicado, isto é, se se inscreve na linha de especialização da revista, se tem matéria suficientemente nova e interessante e se, no essencial, os resultados estão correctos. Dão também sugestões de alteração. Com base na opinião dos árbitros, que é, em muitos aspectos, subjectiva, o editor toma normalmente uma de quatro decisões: não publicar o artigo, publicar o artigo tal qual está (o que é muito raro), publicar o artigo após o autor introduzir pequenas alterações tendo em conta as sugestões dos árbitros, sugerir ao autor substanciais alterações a introduzir de acordo com a recomendação dos árbitros e resubmeter o artigo modificado para nova apreciação sobre se será ou não publicado.

Quando os árbitros são competentes e gastam algum tempo a ver o artigo, este pode melhorar substancialmente. Com efeito, os erros e gralhas podem ser detectados, a redacção pode ser melhorada aqui e ali para tornar o texto mais claro, alguns aditamentos interessantes podem ser sugeridos, referências bibliográficas relevantes esquecidas pelos autor(es) ou desconhecidas deste(s) podem ser incluídas, um exemplo ilustrativo pode ser acrescentado, alguma afirmação não justificada (ou insuficientemente justificada) pode vir a sê-lo, etc.

Muitas vezes beneficiei deste trabalho anónimo e não remunerado dos árbitros. O caso mais relevante foi o de um artigo em que aparecia uma expressão matemática que, por ser parecida com outra anteriormente surgida no artigo, eu transcrevi com "cópia e cola", mas que me esqueci de fazer a alteração no índice superior de um somatório (esqueci-me na altura e, quando fiz a revisão, li o que lá devia estar e não o que lá estava). Havia uma matriz cujos elementos eram definidos por essa expressão e que era ortogonal, aspecto essencial para que o resto do raciocínio funcionasse. Dada a limitação do número de páginas que podia usar, omiti a demonstração da ortogonalidade da matriz, já que, embora fosse trabalhosa, era trivial e qualquer leitor a poderia reconstituir se quisesse. Claro que, devido à gralha, a matriz "gralhada" já não era ortogonal. Felizmente, um dos árbitros, deu-se ao trabalho de verificar se a matriz era ortogonal e, por mais que tentasse, não conseguia mostrá-lo. Podia naturalmente ser por inabilidade dele ou podia ser porque não era ortogonal. Pôs a questão ao editor, que me transmitiu o seu pedido para que apresentasse a demonstração da ortogonalidade da matriz (não para ser incluída, porque não havia espaço, mas para ser verificada pelo árbitro). Claro que aí detectei a gralha e corrigi-a, juntando a demonstração de que a matriz (com a expressão correcta) era ortogonal. Juntava também, naturalmente, as minhas desculpas pelo tempo que fiz perder ao árbitro e os meus agradecimentos pelo trabalho exaustivo e cuidadoso que tinha feito. Se não fosse isso, um leitor que utilizasse o meu artigo (e não fosse meticuloso ao ponto de verificar se tudo o que lá estava era correcto) corria o risco de ir trabalhar com uma matriz incorrectamente definida e invalidar as conclusões a que chegasse (nomeadamente testes estatísticos nela baseados poderiam rejeitar uma hipótese que deveria ter sido aceite ou aceitar uma que deveria ter sido rejeitada). A gralha era insignificante, mas as consequências não.

Também sirvo frequentemente de árbitro para revistas científicas e para actas de reuniões científicas. Tenho, como é natural, a preocupação de ser meticuloso, para que os erros e gralhas possam ser corrigidas e a clareza do texto melhorada. Talvez a minha contribuição mais útil tenha sido para um artigo em que um passo de uma demonstração usava um argumento incorrecto para chegar a uma conclusão, a qual fazia falta para o resto da demonstração. Não me limitei a apontar o erro e procurei ver se a demonstração podia ser salva, já que o teorema me "cheirava"[29] a verdadeiro e, a sê-lo, continha um resultado importante. Felizmente, verifiquei que o resto da demonstração, que se baseava naquela conclusão, podia ser modificado de modo que bastaria basear-se numa conclusão mais fraca que a anterior, a qual podia ser obtida por meio de um argumento correcto. Outras vezes, também, detectei um argumento incorrecto numa demonstração, mas incorrecto porque, para funcionar, necessitaria de uma hipótese adicional no enunciado do teorema; acrescentada esta, o teorema, embora ligeiramente modificado, "salvava-se".

Mas também acontece depararmos ocasionalmente com árbitros que fazem um mau trabalho. Por vezes, fazem um trabalho pouco meticuloso, deixando passar falhas e insuficiências. Outras vezes têm um conhecimento superficial do assunto (quiçá porque o editor não percebeu bem qual era a área de especialidade), mas, mesmo assim, aceitam o trabalho, fazendo depois críticas absurdas, como dizerem que certas coisas certas estão erradas, ou que os resultados são triviais ou não têm relevância, não porque assim seja, mas precisamente porque não entendem suficientemente do assunto. Se se tem a sorte de o outro árbitro achar o artigo uma maravilha, com resultados inovadores importantes, o artigo poderá ir a um terceiro árbitro ou o editor poderá exigir que se introduzam alterações de acordo com as sugestões e críticas do tal árbitro pouco conhecedor, caso em que vamos ter o trabalho de explicar cuidadosamente onde é que ele errou (já que não queremos voluntariamente introduzir disparates nos nossos artigos). Se temos o azar de o segundo árbitro ter uma posição de aceitação, mas menos entusiasmada, pode bem suceder que o artigo seja rejeitado.

Caso o artigo não seja publicado ou o autor não aceite as alterações que porventura lhe sejam impostas e comunique o facto ao editor, fica o autor livre para submeter o artigo a outra revista científica. Mas não fica livre de, por coincidência, um dos árbitros designados por essa revista, ser o mesmo.

Por vezes surgem situações curiosas. Um caso interessante foi a de um árbitro de um artigo em que era co-autor e que fez pequenas sugestões de alteração de pouca importância (que até melhoravam o texto), mas que considerava que o artigo devia fazer referência a uma quantidade enorme de trabalhos, todos da autoria ou co-autoria de um Senhor X (aliás, um dos mais reputados e citados autores daquela área genérica). O nosso trabalho citava os trabalhos do Senhor X que tinham alguma coisa a ver com o tema concreto do nosso trabalho, mas não citava aqueles outros sugeridos pelo árbitro porque a sua ligação ao tema era extremamente remota e porque, a fazê-lo, teríamos de citar imensos outros com ligação igualmente remota, tornando a lista de citações exagerada e absurdamente extensa. Neste caso, era óbvio que o árbitro "anónimo" era mesmo o Senhor X, que era também um dos editores da revista, e também era óbvio porque razão o Senhor X era tão citado nos trabalhos publicados nessa revista, aliás a mais importante daquela especialidade.

Alguns "palpites" sobre os problemas que atravessa a educação matemática

Para além das considerações que apresento logo na Introdução deste texto a propósito do papel da investigação na aprendizagem da Matemática, acrescentarei aqui algumas outras referentes às dificuldades que a educação matemática actualmente atravessa. Sustentam-nas apenas alguma experiência e intuição e algumas leituras não sistemáticas, cujas fontes e influências já esqueci. Por tudo isso e porque não me assiste qualquer autoridade científica de investigador em educação matemática, que não sou, como "palpites" ou "divagações" devem ser encarados.

Eis os "palpites" que queria deixar:

- Considero que a aplicação universal de reformas curriculares ou de métodos de ensino-aprendizagem se deve basear, não em meros "palpites" (e aqui incluo todos, os meus em particular, mas especialmente os dos que se instalaram nas estruturas de decisão do Ministério da Educação, por mais iluminados que os considerem), mas em investigação em educação matemática solidamente sustentada em experimentação pedagógica[30]. Isto não significa que os "palpites" não sejam úteis; afinal, uma investigação começa muitas vezes com um "palpite".
- Em consequência, considero essencial desenvolver a investigação em educação matemática, o que exige a formação de mais investigadores, a colaboração destes com as estruturas educativas, a divulgação dos resultados e a disponibilização dos necessários financiamentos.
- Há um ambiente social desfavorável à Matemática e ao seu ensino, que está a contribuir para a degradação deste (um verdadeiro desastre nacional!) e a prejudicar seriamente o desenvolvimento cultural, científico e tecnológico do País. Embora esse ambiente pareça estar a

sofrer alguma inflexão favorável, exigem-se medidas urgentes de mobilização social.

- O gosto ou o desgosto pela Matemática adquirem-se muito cedo e, por isso, é preciso dar particular atenção ao primeiro ciclo do ensino básico e às qualificações dos seus professores[31].
- O principal problema do ensino da Matemática não é propriamente o dos conteúdos curriculares, mas o de não desenvolver a capacidade de dedução matemática. Isso exige, entre muitas outras coisas, que não expulsemos as demonstrações do ensino da Matemática e que proporcionemos ao estudante oportunidade de construir ele próprio demonstrações.
- Os professores, a escola e a sociedade devem ser exigentes[32] para permitir o pleno desenvolvimento do potencial dos jovens. O "músculo" intelectual precisa de desafios e estiola com a falta de exercício. O actual "facilitismo" que se instalou no sistema de ensino é, em boa parte, responsável pelos problemas de qualidade do sistema educativo e é um crime contra a juventude.

Conclusão

Começámos por afirmar que aprender Matemática passa necessariamente por uma faceta investigativa, que só se pode apreender fazendo investigação matemática (ao nível adequado para cada grau de ensino). Dessa investigação não devemos excluir (antes pelo contrário) as aplicações da Matemática (e, particularmente, a modelação matemática), explorando a sua relação simbiótica com as diversas Ciências. Não estamos a falar de descobertas verdadeiramente novas para o capital científico da Matemática, mas sim de descobertas novas para o capital científico do estudante. Claro que elas poderiam ter sido apresentadas como conhecimento já feito, mas ao não o serem, vão permitir ao estudante a prática (e, assim esperamos, o prazer) da investigação matemática. Sem essa prática, podemos dizer o que quisermos mas, se formos minimamente honestos, sabemos que não estamos a ensinar Matemática e que o estudante não está a aprender Matemática. Não nos devemos espantar se ele não gostar.

Procurei, em seguida, como me foi pedido, dar um testemunho (necessariamente pessoal porque todos somos diferentes) do que é a actividade de investigação matemática. Para o fazer, socorri-me de dois exemplos, um muito antigo e trivial (de estudante do secundário) e um recente. Não me atreverei a resumir em forma esquematizada as ideias e os meandros envolvidos na prática de investigação matemática que procurei ilustrar na apresentação desses exemplos. Em jeito de desculpa, poderei dizer que nada melhor que deixar os exemplos falarem por si ou ainda que não reflecti o suficiente sobre a minha prática de investigação para poder ter uma teoria (ou um esboço de teoria) sobre essa prática.

Falei também de alguns aspectos relacionados com a difusão e a validação da investigação matemática.

Terminei com alguns "palpites" sobre as dificuldades que a educação matemática actualmente atravessa.

Notas

[1] Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

[2] A prática da demonstração de propriedades não encontradas no livro de texto, dando espaço ao estudante para descobrir estratégias de demonstração, é essencial para o desenvolvimento das suas capacidades matemáticas. Embora essa atitude se deva desenvolver em qualquer tópico leccionado, a geometria euclideana é, nesse aspecto, um excelente manancial.

[3] Algumas sugestões de projectos em dinâmica e em genética de populações, a realizar possivelmente em colaboração com a disciplina de Biologia (inclusivamente no âmbito de um Clube de Ciência), aparecem em Braumann, C. A. (2001), A Matemática e a Vida, *Educação e Matemática* 64: 23-29. Outras sugestões envolvem problemas de depósitos e empréstimos, de probabilidades associadas a jogar no totoloto, de cifras [veja-se Sarrico, C. (1995). Os Números Primos e o Sistema de Codificação R. S. A., *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 33: 81-89] ou de algarismos de teste para detecção e correcção de erros na transmissão de dados [veja-se Picado, J. (2001). A Álgebra dos Sistemas de Identificação, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 44: 39-73]. Mas os problemas e projectos de natureza mais puramente matemática (não directamente suscitados pelas aplicações) também são úteis e necessários.

[4] Há até vantagem em que se façam também inquirições na aparência puramente matemáticas. Curiosamente, a experiência tem mostrado que frequentemente elas vêem a ter aplicações em áreas insuspeitas. Um exemplo típico é a teoria dos números, que recentemente veio a ter importantes aplicações na codificação de mensagens em canais inseguros, sem o que não teríamos multibanco nem comércio electrónico.

[5] Outros valores de k inteiros também fornecem raízes, mas são repetidas.

[6] O ser $\mathrm{cis}\,\theta = e^{i\theta}$ não é só uma questão de notação, mas um facto mais profundo.

[7] E, por isso, certamente insusceptível de publicação em revistas científicas matemáticas credenciadas.

[8] Esta taxa é a diferença entre as taxas (instantâneas) de natalidade e de mortalidade *per capita*.

[9] INT(x) representa o maior inteiro inferior ou igual a x.

[10] Outra abordagem (aqui expressa de forma informal, pouco rigorosa) para chegar ao modelo malthusiano seria partir logo da ideia de juros compostos continuamente no tempo e considerar o que se passaria num pequeno intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$; um modelo aproximado seria $N(t+\Delta t)\approx N(t)+(r\Delta t)N(t)$, donde a razão incremental seria $(N(t+\Delta t)-N(t)) / \Delta t \approx rN(t)$ e, passando ao limite quando $\Delta t\rightarrow 0$, obteríamos a equação diferencial $\mathrm{d}\, N(t)/\mathrm{d}\, t = rN(t)$.

[11] Gause, G. F. (1934). *The struggle for existence.* Williams and Wilkins, Baltimore.

[12] Com o termo "natural", queremos dizer o que ocorreria pela natalidade e mortalidade naturais da população, isto é, sem considerar a mortalidade provocada pela pesca.

[13] Interessa considerar um equilíbrio com população positiva pois um equilíbrio com população nula corresponderia à extinção desta, situação em que nada se pescaria.

[14] Termo que designa uma variável que varia com o tempo e com as circunstâncias que o acaso ditou para os diversos factores que afectam a população.

[15] Gaussiano significa que tem distribuição normal, o que advém de serem múltiplos os factores perturbadores e do teorema do limite central. O termo "ruído branco" é um termo técnico, com significado preciso que, por ser demasiado longo fazê-lo, não irei explicitar aqui. Direi apenas informalmente que tal significa que os efeitos acumulados do ruído em intervalos de tempo não sobrepostos são probabilisticamente independentes. Os "ruídos" naturais não são, em geral, nem exactamente brancos nem exactamente gaussianos, mas trata-se de aproximações razoáveis que facilitam o tratamento matemático do problema.

[16] Sendo um "ruído", não depende apenas do tempo, mas também do "acaso". Usa-se a convenção habitual em probabilidades de não explicitar essa dependência do "acaso" para tornar a notação mais leve.

[17] É uma equação diferencial com um termo estocástico (dependente do "acaso"). Vamos interpretá-la usando o cálculo de Stratonovich (um cálculo estocástico), que não vou aqui abordar.

[18] Rigorosamente deveríamos dizer que a probabilidade de se extinguir é um. A não-extinção terá então probabilidade zero de ocorrer, mas isso não significa que seja impossível, embora, para efeitos práticos, a possamos considerar como tal. Também acertar com o ponto central da ponta de uma seta exactamente no ponto central de um alvo não é impossível mas, como tem probabilidade zero de ocorrer, considera-se como praticamente impossível.

[19] Rigorosamente, a probabilidade de a extinção ocorrer é zero. Aqui, porém, há que ter uma certa cautela porque estamos a trabalhar com modelos aproximados em que o tamanho da população varia continuamente, podendo tomar valores não inteiros, o que não tem importância para populações grandes (o erro de aproximação é desprezável), mas tem para populações à beira da extinção. Assim, embora no modelo a probabilidade de extinção seja zero, na realidade, devido ao erro de aproximação do modelo, ela poderá tomar um valor positivo pequeno.

[20] O problema da optimização e o estudo com o cálculo de Stratonovich podem ver-se em: Braumann, C. A. (1985), Stochastic differential equation models of fisheries in an uncertain world: extinction probabilities, optimal fishing effort, and parameter estimation, em

Mathematics in biology and medicine, V. Capasso, E. Grosso e L. S. Paveri-Fontana (Orgs.), Springer, Berlin. O estudo (sem optimização) para alguns modelos, usando o cálculo de Ito, já havia sido feito por: Beddington, J. R. e May, R. M. (1977), Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment, *Science* 197: 463-465. Pode também ver-se em May, R. M., Beddington; J. R., Horwood, J. H. e Shepherd, J. G. (1978), Exploiting natural populations in an uncertain world, *Math. Biosc.* 42: 219-252.

[21] O modelo logístico corresponde ao caso particular $g(N)=r(1-N/K)$).

[22] Se fosse negativo, a população teria uma mortalidade natural superior à natalidade natural e a extinção seria certa, caso sem interesse, por tão trivial de estudar; seria, por exemplo, o caso de termos $r<0$ no modelo logístico.

[23] Caso contrário, a população, por maior que fosse, cresceria sempre, o que não é biologicamente realista.

[24] Caso contrário, a taxa de crescimento natural total seria positiva para uma população nula, ou seja, haveria geração espontânea, o que é biologicamente impossível.

[25]Se quisermos usar uma média aritmética, devemos usar o cálculo de Ito em vez do cálculo de Stratonovich, como mostrarei num artigo em preparação.

[26] Este resultado saiu no artigo: Braumann, C. A. (1999), Variable effort fishing models in random environments, *Math. Biosc.* 156: 1-19.

[27] O bom senso provavelmente não nos diria que deveríamos usar uma média geométrica para que funcionasse. Igual enunciado com uma média aritmética tem situações em que falha.

[28] Braumann, C.A. (2002). Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. *Math. Biosc.* 177-178: 229-245.

[29] O "faro" (ou intuição) é um dos principais amigos do investigador; sem ele, não vai longe. Como se adquire? Não sei, mas sei que a experiência do nosso trabalho e do trabalho alheio ajuda a desenvolvê-lo.

[30] Não o fazemos em Medicina. Porque razão o fazemos na Educação, tão vital para o nosso futuro colectivo?

[31] Advogo mesmo, entre outras medidas, que a Matemática (a par do Português) passe a ser exigida como prova de ingresso obrigatória para as licenciaturas que formam esses professores, o que exige concertação entre as instituições formadoras.

[32] Claro que não ajuda a ilusão instilada de que se pode aprender sem esforço e que, quando isso não resulta, a culpa é necessariamente do professor que não soube tornar a matéria atraente para os estudantes. Tornar as matérias atraentes é importante, mas há partes da matéria que são necessárias mas dificilmente se podem tornar atraentes. Por outro lado, em Matemática raras são aquelas, atraentes ou não, que não exijam algum esforço.